

Tècniques experimentals de mecànica i ones

Índex

1. METROLOGIA
 - 1.1.- Metrologia.
 - 1.2.- Sistema internacional d'unitats.
 - 1.3.- Anàlisi dimensional.

2. ANÀLISI I PRESENTACIÓ DE DADES
 - 2.1.- Errors i xifres significatives.
 - 2.2.- Representació gràfica de dades.

3. MESURA DE POSICIÓ, TEMPS I MAGNITUDS RELACIONADES
 - 3.1.- Mesura de longituds, superfícies i volums.
 - 3.2.- Determinació de posicions, velocitats i acceleracions.

4. MESURA DE DENSITATS. CENTRE DE GRAVETAT
 - 4.1.- Densitat de sòlids i líquids.
 - 4.2.- Densitat de gasos.
 - 4.3.- Centre de gravetat.

5. MESURA DE FRICCIÓ I VISCOSITAT
 - 5.1.- Coeficients de fricció: estàtic, dinàmic i de rodolament.
 - 5.2.- Viscositat.

6. MESURA DE FORCES, PRESSIONS I FLUXOS
 - 6.1.- Dinamòmetre. Transductors piezoelèctrics.
 - 6.2.- Manòmetres.
 - 6.3.- Mesura de fluxos.
 - 6.4.- Forces d'un fluid sobre un sòlid.

7. MESURA DE MAGNITUDS ELÀSTIQUES
 - 7.1.- Tensions i deformacions.
 - 7.2.- Mòdul de Young i coeficient de Poisson.
 - 7.3.- Duresa de Brinell.

8. MESURA DE MAGNITUDS DE LES ONES
 - 8.1.- Conceptes generals.
 - 8.2.- Superposició d'ones.
 - 8.3.- Reflexió i transmissió.
 - 8.4.- Ones sonores.

TEMA 1

METROLOGIA

1.1.- Metrologia.

La ment humana, en observar el món que l'envolta, genera, en un procés d'abstracció, conceptes que corresponen a un caràcter comú entre cossos o fenòmens: són el que s'anomena **observables**. Per exemple, el concepte de longitud surt en observar línies més o menys llargues; també el concepte de durada temporal és el resultat de l'observació directa; altres vegades el concepte naix com a causa d'un fet observable, i també s'anomena d'aquesta manera; la força és un exemple d'aquest tipus. Els observables poden presentar-se en quantitats o grandàries diferents. Així, és fàcil veure que una corda és més llarga que una altra, o que un interval temporal és major que un altre. Designem amb la lletra A un observable i (A_1) i (A_2) dues quantitats seues; direm que aquestes quantitats són comparables quan existeix una definició operacional i universal per a la raó $(A_1) / (A_2) = n$, on n és un nombre racional que expressa quantes vegades és més gran la quantitat (A_1) que la (A_2)

$$(A_1) = n(A_2)$$

Un observable dotat d'aquesta propietat és una **magnitud física**. Cal aclarir que l'adjectiu operacional d'aquella definició significa que cal indicar les operacions necessàries per a la comparació, i el d'universal vol dir que és independent del tipus de cossos i de procediments emprats en la comparació.

Definida la relació entre quantitats es pot parlar de la igualtat entre elles i de la seua suma. En efecte, si

$$\frac{(A_1)}{(A_0)} = n_1; \frac{(A_2)}{(A_0)} = n_2; \frac{(A_3)}{(A_0)} = n_3;$$

es dedueix que $(A_1) = (A_2)$ si $n_1 = n_2$ y $(A_1) + (A_2) = (A_3)$ si $n_1 + n_2 = n_3$.

Recíprocament, si es defineix la igualtat i la suma, queda definida la raó entre quantitats si s'accepta el postulat de divisibilitat indefinida. En efecte, si es tenen dues quantitats (A_0) i (A_1) , es poden escollir quantitats iguals (A) tals que

$$(A_0) = (A) + (A) + (A) + \dots + (A) = n_0(A)$$

$$(A_1) = (A) + (A) + (A) + \dots + (A) = n_1(A)$$

i llavors

$$\frac{(A_1)}{(A_0)} = \frac{n_1}{n_0}$$

La manera més còmoda de comparar quantitats d'una magnitud A és definir una unitat U_A . Aleshores, el nombre

$$\frac{(A_1)}{U_A} = A_1$$

representa la mesura de la quantitat (A) amb la unitat U_A . Així es té la relació fonamental

$$(A) = AU_A$$

En un canvi d'unitats que passe de U_A a U'_A es verifica la igualtat

$$AU_A = A'U'_A \quad \text{és a dir} \quad \frac{A}{A'} = \frac{U'_A}{U_A}$$

Les mesures d'una quantitat són inversament proporcionals a les unitats corresponents.

La ciència que s'ocupa de la mesura i de la revisió de les magnituds físiques i químiques i també de llurs unitats s'anomena metrologia. L'edat moderna de la metrologia comença el 1969 amb la creació del CODATA (Comité de Dades per a la Ciència i la Tecnologia), la finalitat del qual és proporcionar una sèrie de valors precisos per a les constants bàsiques i els factors de conversió. El 1973 CODATA publicà el seu primer

informe amb els valors de les constants físiques i químiques i els factors de conversió adaptats internacionalment. L'última revisió d'aquests valors es va realitzar el 1986.

1.2.- Sistema internacional d'unitats.

El sistema internacional d'unitats (SI) és una recopilació ordenada de les magnituds físiques i químiques basada en una divisió en magnituds fonamentals i derivades; aquestes darreres poden expressar-se en termes de les fonamentals, tal com es veurà més endavant. Es prenen com a fonamentals les magnituds longitud, temps, massa, corrent elèctric, temperatura i intensitat lluminosa, a les quals hom associa les respectives unitats: metre, segon, kilogram, ampere i candela. També es considera fonamental una altra unitat de massa que és el mol. Passarem a donar-ne les definicions, alguna referència històrica i alguns exemples d'ordres de magnitud.

Metre (m). Es defineix com la longitud de la trajectòria recorreguda per la llum en el buit en un temps de $1/c$ segons ($c=299792458$ m/s, velocitat de la llum en el buit) Aquesta definició es basa en l'adopció de c com a constant universal amb un valor establert amb gran precisió mitjançant mesures de distàncies interplanetàries per radar (CODATA 1986). Originalment, la mesura de longituds es feia per comparació amb un patró anatòmic (braçada, peu, polzada, pam), però aquestes unitats es deixaren per un altra de més objectiva quan s'establí el sistema mètric decimal (1792), base del sistema d'unitats actual. La primera definició científica del metre, basada en mesures geogràfiques, l'igualava a la deumilionèsima del quadrant del meridià terrestre que passa per París. Encara que peca d'imprecisió, i per això s'ha abandonat, pot servir per tenir una idea aproximada del perímetre de la Terra i, en conseqüència, del seu radi:

$$\text{Perímetre terrestre} = 4 \cdot 10^7 \text{ m} = 2\pi R; \quad R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m} \quad 4 \cdot 10^7$$

Posteriorment es prengué com a metre la longitud d'un patró de platí-iridi, que tampoc no era precisa i, a partir del 1960, la definició es desvinculà de patrons macroscòpics. Els avenços assolits en espectroscòpia permeteren donar una definició del metre en termes de la longitud d'ona de la llum taronja emesa per una làmpada de criptó 86.

Per tenir una noció d'ordres de magnitud donarem alguns valors estadísticament típics:

- Diàmetre del protó o del neutró: 10^{-15} m
- Diàmetre nuclear: 10^{-14} m
- Diàmetre d'un àtom: 10^{-10} m
- Distància interiònica en un cristall iònic: $5 \cdot 10^{-10}$ m
- Diàmetre d'una molècula gran: 10^{-8} m
- Objecte mínim visible en un microscopi òptic: 10^{-6} m
- Objecte mínim visible a simple vista: 10^{-4} m
- Pam: 0,2 m
- Pas: 0,8 m
- Alçada d'una persona: 1,80 m
- Estrelles de neutrons, forats negres: 10^4 m
- Distància Terra - Lluna: $4 \cdot 10^8$ m
- Diàmetre del Sol: 10^9 m
- Distància Terra - Sol: $1,5 \cdot 10^{11}$ m
- 1 any-llum= $9,46 \cdot 10^{15}$ m
- Dimensions de la Via Làctia: 10^{21} m
- Distància Terra - galàxia d'Andròmeda: $2 \cdot 10^{26}$ m
- Radi de l'Univers: 10^{28} m.

Kilogram (kg). La definició actual es manté des de 1887 i s'identifica amb la massa d'un prototip internacional que és un cilindre d'iridi-platí guardat al Bureau de Poids et Mesures de París. Alguns valors usuals són:

- Massa de l'electró: $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg
- Massa del protó: $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg
- Massa d'una persona: 80 kg
- Massa de la Lluna: $7,35 \cdot 10^{22}$ kg

-Massa de la Terra: $5,97 \cdot 10^{24}$ kg

-Massa del Sol: $2 \cdot 10^{30}$ kg

Segon (s). Des de 1967 es defineix com la durada de 9192631770 períodes de la radiació corresponent a la transició entre dos nivells hiperfins de l'estat fonamental del cesi 133. Antigament, la mesura del temps es basava en la periodicitat astronòmica observada, especialment la repetició de les fases lunars; el coneixement de la dinàmica planetària i l'augment en la precisió de les mesures ha portat a substituir el temps astronòmic per la definició actual.

Com a valors típics donem:

-Pulsació del cor humà: 0,8 s

-Dia: $8,6 \cdot 10^4$ s

-Any: $3,1 \cdot 10^7$ s

-Vida d'una persona: 70 anys = $2 \cdot 10^6$ s

-Temps transcorregut des de l'aparició dels primers homínids: $3 \cdot 10^6$ anys = 10^{14} s

-Temps transcorregut des de la formació de la Terra: $4,5 \cdot 10^9$ anys = $1,4 \cdot 10^{14}$ s

-Temps transcorregut des de l'origen de l'Univers: $1,37 \cdot 10^{10}$ anys = $4,25 \cdot 10^{17}$ s

Ampere (A). És el corrent elèctric constant que, quan passa per cadascun de dos fils paral·lels molt fins i llargs, separats en el buit per una distància d'1 metre, produeix una força per metre de longitud de $2 \cdot 10^{-7}$ N en cada fil.

Kelvin (K). És la unitat termodinàmica de temperatura i es defineix com a $1/273,16$ de la temperatura del punt triple de l'aigua. S'ha triat aquest punt perquè és molt fàcilment reproducible.

Candela (cd). Unitat d'intensitat lluminosa que correspon a la que emet en una direcció donada una font de radiació monocromàtica de freqüència $5 \cdot 10^{12}$ Hz i que té una intensitat radiant en aquella direcció de $1/683$ Watt/estereoradià.

Altres unitats de massa molt emprades en la pràctica són la unitat atòmica de massa i el mol.

Unitat atòmica de massa (u). És $1/12$ de la massa de l'àtom C 12, que té per valor $1,66 \cdot 10^{-24}$ g (particularment els químics solen usar el gram com a unitat de massa).

Mol d'una substància és la quantitat de matèria d'un sistema que conté tantes de les seues unitats elementals com àtoms hi ha en 0,012 kg de C 12, nombre que s'anomena d'Avogadro, $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$, i que es relaciona amb la unitat u així:

$$N_A = 12 \text{ g}/12\text{u(g)} = 1\text{g/u(g)}$$

Si les entitats del sistema considerat són àtoms es parla d'àtom-gram; si són ions, d'ió-gram, i si són molècules es parla de molècula-gram. Quan es tracta d'electrons, un mol d'aquests es coneix com a faraday. El mol, a més d'un nombre d'ens, és una unitat de massa. En efecte, si es tracta d'una molècula de massa molecular M , ço és, $Mu(g)$, un mol o molècula-gram serà la massa que expressada en grams valdrà

$$1 \text{ mol} = N_A Mu(g) = M(g)$$

mentre que quan es tracta d'electrons, un faraday serà la massa que s'obté multiplicant N_A per la massa de l'electró.

Altres unitats derivades que s'usen molt sovint en el camp de la mecànica són:

Newton (N). És la força que aplicada a un cos d'1 kg de massa li confereix una acceleració d'1 ms^{-2} .

Joule (J). És la unitat d'energia i de treball, i és igual al treball realitzat per una força d'1 N quan es desplaça una longitud d'1 m en la seua direcció i sentit. En diversos camps de la física s'empra l'electró-volt, energia guanyada per un electró quan passa per una diferència de potencial d'1 volt: $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J.

Watt (W). És la unitat de potència, i correspon al desenvolupament d'un treball d'1 J en un temps d'1 s.

Pascal (Pa). És la pressió provocada per una força d'1 N sobre una superfície d'1 m^2 .

Hertz (H). És la freqüència d'un fenomen periòdic amb un període d'1 s. Molt sovint fem ús de la freqüència angular, la unitat de la qual és el radià/s. Òbviament, 1 H equival a 2π rad/s.

No parlarem de les unitats electromagnètiques, que es deixen per a la matèria corresponent.

A l'hora d'expressar una quantitat cal no oblidar mai les unitats corresponents, i resulta còmode emprar els valors numèrics en forma de productes de nombres menors que 10 multiplicats per la potència de 10 adient o, en comptes d'això, usar els prefixos indicadors d'aquelles potències; en el SI els prefixos són:

Potència de 10	Prefix	Símbol	Potència de 10	Prefix	Símbol
-18	atto	a	1	deca	da
-15	femto	f	2	hecto	h
-12	pico	p	3	kilo	k
-9	nano	n	6	mega	M
-6	micro	μ	9	giga	G
-3	mili	m	12	tera	T
-2	centi	c	15	peta	P
-1	deci	d	18	hexa	E

1.3.- Anàlisi dimensional.

Cada magnitud física està relacionada amb altres, bé per la seua pròpia definició, o bé com a resultat de l'observació de la realitat. Qualsevol d'aquests lligams pot expressar-se de manera general com una relació de proporcionalitat entre les quantitats respectives

$$(X) \sim (A)^\alpha (B)^\beta (C)^\gamma \dots$$

Tanmateix, resulta més útil quantificar les relacions esmentades prenent les unitats adients per a cada magnitud. Llavors,

$$X U_X = k A^\alpha U_A^\alpha B^\beta U_B^\beta C^\gamma U_C^\gamma \dots$$

on k és la constant de proporcionalitat, que depèn de les unitats escollides. Molt sovint, una elecció d'unitats fa que $k=1$, cas en què direm que és una **constant supèrflua** i que U_X , U_A , U_B , U_C formen un sistema coherent d'unitats. Tal és el cas de la segona llei de Newton

$$(F) \sim (m)(a); F U_F = k m U_m a U_a$$

i, triant-hi $U_m=1\text{kg}$, $U_a=1\text{m/s}^2$ i $U_F=1\text{N}$ es té $k=1$ i $F=ma$.

Les constants que no són supèrflues poden ser **particulars**, que depenen dels cossos que hi intervenen, o **universals**, en cas contrari. Les constants universals en física són:

1. La velocitat de la llum en el buit, definida més amunt.
2. El nombre d'Avogadro, definit més amunt.
3. La constant de gravitació universal, $G=6,673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$
4. La constant de Boltzmann, $k=1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
5. La constant dielèctrica del buit, $\epsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.

Si considerem les constants ineludibles com a magnituds físiques, podem reescriure la relació anterior entre diverses magnituds en forma de monomi:

$$(X_1)^{\alpha_1} (X_2)^{\alpha_2} \dots (X_n)^{\alpha_n} = 1$$

En una teoria física, com ara la mecànica, hom pot fer ús d'un conjunt de m equacions com l'anterior que lliguen les n magnituds, conjunt que es pot resumir així:

$$\prod_{i=1}^n (X_i)^{\alpha_{ji}} = 1 \quad j=1,2,\dots,m$$

Prenem ara un sistema d'unitats coherent U_i i tindrem

$$\prod_{i=1}^n X_i^{\alpha_{ji}} \prod_{i=1}^n U_i^{\alpha_{ji}} = 1 \quad j=1,2,\dots,m$$

tot tenint, per separat,

$$\prod_{i=1}^n X_i^{\alpha_{ji}} = 1 \quad j=1,2,\dots,m$$

$$\prod_{i=1}^n U_i^{\alpha_{ji}} = 1 \quad j=1,2,\dots,m$$

Finalment, prenem logaritmes en l'última equació i obtenim

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \ln U_i = 0 \quad j=1,2,\dots,m$$

sistema de m equacions amb n incògnites definit per la matriu α_{ji} de m files i n columnes, on normalment $n > m$. Si r és el rang de la matriu ($r \leq m$) tindrem $p = n - r$ incògnites arbitràries, en funció de les quals podrem posar la resta. Ordenant-les de manera que les p primeres magnituds siguin les independents, el conjunt $B = \{X_1, \dots, X_p\}$ és una base de la teoria en qüestió i p la seua multiplicitat. En aquest domini, les magnituds de la base i llurs unitats són fonamentals, i les altres unitats s'expressen en termes de les de la base:

$$U_i = \prod_{j=1}^p U_j^{\varepsilon_{ij}} \quad i=p+1, \dots, n$$

Cadascuna d'aquestes r equacions rep el nom de fórmula dimensional de la magnitud X_i en la base B , i ε_{ij} són les dimensions respectives. Per tal d'evitar ambigüitats inherents a l'elecció de la base, a cadascuna de les magnituds fonamentals, X_j , se li associa la seua pròpia dimensió, que es designa $[X_j]$, i l'equació dimensional s'escriu

$$[X_i] = \prod_{j=1}^p [X_j]^{\varepsilon_{ij}} \quad i=p+1, \dots, n$$

En mecànica es fa ús de nombroses magnituds, la major part d'elles definides en termes d'unes altres, però cal només considerar-ne unes quantes per tal de veure que a mesura que augmentem el nombre d'incògnites creix també el rang de la matriu α_{ji} de tal manera que el nombre de variables independents és de 3, entre les quals s'ha convingut a escollir longitud, massa i temps; les dimensions respectives són L, M i T. Les dimensions de qualsevol altra magnitud, com ara l'energia, s'expressen en termes d'aquestes; en efecte, usant-hi les definicions adients es troba fàcilment que $[E] = L^2MT^{-2}$. Una magnitud X de dimensions 0 és adimensional, i s'escriu $[X] = 1$.

Les lleis de la física han de ser invariants en un canvi de sistema d'unitats, cosa que només és possible si les fórmules matemàtiques que les representen són dimensionalment homogènies. En efecte, si la funció que relaciona les mesures, x_1, x_2, \dots, x_n de sengles magnituds físiques que intervenen en una llei física és

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

en fer un canvi d'unitats, les noves mesures x'_i , relacionades amb les anteriors per

$x'_i = \lambda_i x_i$, on λ_i són les raons inverses entre les respectives unitats, han de satisfer la mateixa equació

$$f(x'_1, \dots, x'_n) = 0$$

çò és, la funció f ha de ser matemàticament homogènia. Se'n deriva que els arguments de les funcions exponencials, trigonomètriques, etc. han de ser adimensionals. En efecte, si l'argument x té dimensió α d'una magnitud fonamental, la representació en sèrie de potències de f obliga que $\alpha n = \alpha m$ per a $n \neq m$, cosa que exigeix que $\alpha = 0$. A més, la condició d'homogeneïtat serveix per detectar que s'ha comès algun error en un desenvolupament matemàtic quan l'expressió final no la satisfà.

La importància de l'anàlisi dimensional i les seues possibles aplicacions es desprenen del **teorema de Pi-Buckingham**, que diu que tota equació

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

que represente una llei física pot posar-se en la forma

$$F(\pi_1, \dots, \pi_p) = 0$$

on π_i són els monomis adimensionals independents que es poden formar amb les magnituds que hi intervenen. El nombre d'aquests monomis és $p = n - r$, on r és el rang de la matriu formada amb els exponents dimensionals de magnituds esmentades. Per demostrar-ho comencem escrivint les dimensions de cada magnitud en la base {L,M,T} (la demostració es pot fer igualment per a una base arbitrària),

$$[x_i] = L^{\alpha_{1i}} M^{\alpha_{2i}} T^{\alpha_{3i}} \quad i=1,2,\dots,n$$

i formem monomis adimensionals com ara

$$[\pi] = \prod_{i=1}^n [x_i]^{\varepsilon_i}$$

i els posem en funció de la base

$$[\pi] = \prod_{i=1}^n [L^{\alpha_{1i}} M^{\alpha_{2i}} T^{\alpha_{3i}}]^{\varepsilon_i} = L^{\sum \alpha_{1i} \varepsilon_i} M^{\sum \alpha_{2i} \varepsilon_i} T^{\sum \alpha_{3i} \varepsilon_i} = 1$$

Llavors obtenim un sistema de tres equacions

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \varepsilon_i = 0 \quad j=1,2,3$$

amb n incògnites. Si el rang de la matriu α_{ji} és h ($< n$) es podran elegir $p = n - h$ incògnites ε_i arbitràriament. Designem el conjunt d'exponents per ε_{ik} amb $i=1,\dots,n$ i $k=1,\dots,m$, i formem els monomis adimensionals

$$\pi_k = \prod_{i=1}^n [x_i]^{\varepsilon_{ik}} \quad k=1,\dots,m$$

Ara, en la funció homogènia $f(x_1, \dots, x_n)$ s'agrupen les variables formant-hi els monomis π_k i s'obindrà la funció $F(\pi_1, \dots, \pi_p)$. D'aquesta, hom pot aïllar-ne un monomi, per exemple π_1 , i escriure

$$\pi_1 = \varphi(\pi_2, \dots, \pi_p)$$

que resumeix tota la informació que hi pot proporcionar l'anàlisi dimensional. En cas que només es trobe un monomi, tindrem

$$F(\pi_1) = 0, \quad \pi_1 = F^{-1}(0) \text{ i, doncs, } \pi_1 = \text{constant.}$$

El teorema de Π pot usar-se per establir la dependència funcional entre les variables que intervenen en una llei física, però no la funció concreta, tal com veurem en els exemples següents.

Exemple 1.- Es pensa que la velocitat, v , del so en un medi gasós depèn de la pressió, p , la densitat, ρ i la massa molar, M , del gas, i volem esbrinar el tipus de dependència. Posem que la relació cercada és

$$f(vp\rho M)=0$$

i formem el monomi

$$\pi = (LT^{-1})^{\varepsilon_1} (ML^{-1}T^{-2})^{\varepsilon_2} (ML^{-3})^{\varepsilon_3} M^{\varepsilon_4}$$

que cal que siga adimensional, és a dir, s'ha d'acomplir

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 = 0$$

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 0$$

$$- \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 = 0$$

La matriu del sistema és de rang 3, de manera que podem fixar una incògnita arbitràriament i només hi pot haver un monomi adimensional. Atès que volem aïllar la velocitat, farem $\varepsilon_1=1$ i, en conseqüència $\varepsilon_3=-\varepsilon_2=1/2$ i $\varepsilon_4=0$, és a dir, la dependència funcional haurà de ser

$$vp^{1/2}\rho^{1/2}=K$$

o bé, finalment

$$v = K \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

Exemple 2.- Es vol estudiar la força d'arrossegament, F , que un fluid de densitat ρ i coeficient de viscositat η que es mou amb una velocitat v exerceix sobre una esfera de diàmetre d situada al seu si. Un estudi experimental a cegues ens portaria a prendre, posem per cas, 20 valors de cadascuna de les variables v , ρ i η i 100 valors de d ; exigiria, doncs, 800.000 experiments. L'anàlisi dimensional permet simplificar l'estudi tal com veurem tot seguit. Posem que la relació entre les variables és

$$f(F,d,v,\rho,\eta)=0$$

i formem el monomi adimensional

$$\pi = (MLT^{-2})^{\varepsilon_1} L^{\varepsilon_2} (LT^{-1})^{\varepsilon_3} (ML^{-3})^{\varepsilon_4} (ML^{-1}T^{-1})^{\varepsilon_5}$$

que ens proporciona un sistema d'equacions amb matriu ampliada de rang 3. El nombre de monomis que es poden formar és $5-3=2$, corresponents a l'elecció arbitrària de dues incògnites. Si fem $\varepsilon_1=1$ i $\varepsilon_5=0$, obtenim $\varepsilon_2=\varepsilon_3=-2$ i $\varepsilon_4=-1$ i així

$$\pi_1 = Fd^2v^{-2}\rho^{-1} = F/\rho d^2v^2$$

Mentre que si prenem $\varepsilon_1=0$ i $\varepsilon_5=1$, resulta

$$\pi_2 = \eta(dv\rho)^{-1} = \eta/\rho dv$$

La relació entre els monomis s'escriu $\pi_1 = \varphi(\pi_2)$, ço és

$$F = \rho d^2v^2 \varphi(\eta/\rho dv)$$

i ens mostra que només caldrà fer l'estudi experimental del coeficient d'arrossegament $F/\rho d^2v^2$ per a, posem, 100 valors del paràmetre $Re = \rho dv/\eta$ que es coneix com a nombre de Reynolds.

Exercici 1: Hom sap que el període, T , de les vibracions d'una gota esfèrica depèn del seu radi, r , la densitat, ρ i la tensió superficial σ . Proveu que $T = A r^{3/2} \rho^{1/2} \sigma^{1/2}$.

Exercici 2: Empeu el teorema de Π per esbrinar la dependència del període, T , d'un pèndol amb la seua longitud, l , la seua amplitud angular θ i la seua massa m , i l'acceleració de la gravetat, g .

TEMA 2

ANÀLISI I REPRESENTACIÓ DE DADES

2.1.- Errors i xifres significatives.

Tota mesura implica la utilització d'almenys un instrument del qual hom coneix la **sensibilitat** o variació mínima de la magnitud que pot detectar. En canvi, la **precisió** de la mesura està relacionada amb la seua reproductibilitat, és a dir, la capacitat de donar el mateix resultat en diferents mesures realitzades en idèntiques condicions; pot minvar pel fet d'emprar aparells defectuosos, de fer-ne un ús incorrecte o per la presència de factors que distorsionen la mesura. En conseqüència, quan es mesura una magnitud el resultat està sempre afectat d'un cert error que depèn de la sensibilitat de l'aparell de mesura, del procediment emprat i de l'habilitat de l'experimentador. De fet, si es repeteix la mesura unes quantes vegades els resultats es distribueixen al voltant d'un valor central. Quan aquesta distribució es correspon amb una gaussiana es pren el valor central o mitjà, $\langle x \rangle$, com a valor real de la mesura, i la desviació quadràtica mitjana com a error; aquest darrer és, doncs,

$$\varepsilon_x = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - N \langle x \rangle^2}{N-1}}$$

el resultat s'escriu $\langle x \rangle \pm \sigma$, i a l'error σ se li assigna una fiabilitat del 68%, és a dir, hi ha una probabilitat del 68% que el valor veritable es trobe dins l'interval ($\langle x \rangle - \sigma$, $\langle x \rangle + \sigma$). Com més gran siga el nombre N de mesures realitzades menor resulta la desviació quadràtica mitjana, i en la pràctica aquesta estimació de l'error s'accepta a partir de $N=10$ o 20 .

Si el nombre de mesures és menut (3 o 4) se sol prendre l'error com la semidispersió màxima

$$\varepsilon_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

que té l'inconvenient que no pren en consideració la majoria de les dades, en particular aquelles que es troben pròximes al valor central. De vegades s'utilitza l'error de dispersió:

$$\varepsilon_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{4}$$

Un altra valoració de l'error consisteix a prendre'l com a desviació mitjana absoluta,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \langle x \rangle|$$

normalment poc usada pel caràcter no analític del valor absolut, però, no obstant això, més fiable per a distribucions de mesures no gaussianes amb punts de cua significatius.

En ocasions, per les causes més diverses poden aparèixer entre les mesures dades sospitoses, que es poden identificar pel criteri pràctic que cauen fora de l'interval ($\langle x \rangle - 3\sigma$, $\langle x \rangle + 3\sigma$). La probabilitat que una dada caiga fora d'aquest interval és del 0,3%; llavors, i sempre que el nombre de resultats sospitosos siga petit comparat amb el total, està justificat eliminar-los i tornar a fer els càlculs.

El nombre que permet comparar les precisions en les mesures, àdhuc de magnituds diferents, és l'error relatiu, $\varepsilon_r(x) = \varepsilon(x)/x$.

Molt sovint, una magnitud, z , es determina indirectament fent-hi les operacions adients sobre els valors de les magnituds, x , y ... que s'obtenen per mesura directa. Si aquestes venen

donades amb llurs errors màxims i es pretén obtenir també el valor màxim de l'error de z , suposant-hi que els errors de les mesures directes no es compensen, llavors

$$\varepsilon_z = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \varepsilon_x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \varepsilon_y + \dots$$

on els valors absoluts donen compte de l'absència de compensació esmentada. Per contra, si els errors de les mesures directes són estadístics, ço és, si coincideixen amb les desviacions estàndard, llavors es compensen entre si i l'error del resultat és

$$\varepsilon_z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \varepsilon_x \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \varepsilon_y \right)^2 + \dots}$$

aquesta és l'estimació més emprada, encara que els errors de les mesures directes siguin màxims o de sensibilitat.

Tal com ja s'ha dit, el valor numèric d'una magnitud cal escriure'l sempre amb l'error absolut que l'afecta, la qual cosa ens du a introduir el concepte de xifres significatives: són els dígitos que constitueixen el valor d'una magnitud exceptuant-hi els zeros que indiquen l'ordre de magnitud. Per exemple, $10.500 = 105 \cdot 10^2$ té 3 xifres significatives i $0,0160 = 1,60 \cdot 10^{-2}$ també en té 3. A l'hora d'escriure el valor d'una magnitud s'adopten els següents criteris pràctics:

- 1- L'error s'expressa amb només una xifra significativa si aquesta és diferent d'1, i amb dues si la primera és 1.
- 2- En el valor de la magnitud cal arribar fins a l'últim ordre decimal amb què s'escriu l'error.

Aquests criteris ens porten a la necessitat d'arrodonir els valors numèrics obtinguts mitjançant càlculs, cosa que es fa atenint-se al criteri que si la primera xifra negligida és major que 4, l'última xifra conservada s'augmenta amb una unitat, mentre que si és menor o igual a 4, l'última xifra es deixa igual. Com a exemples de bona i mala escriptura donem els següents:

Malament	Bé
3,4180±0,123	3,42±0,12
6,3±0,085	6,30±0,09
46288±1553	(4,63±0,16) • 10 ⁴
428,351±0,27	428,4±0,3
0,01683±0,0058	(1,7±0,6) • 10 ⁻²

Els conceptes que s'acaben de donar tenen un contingut pràctic i, per tant, convé fer-ne un bon ús i tenir una idea de llurs limitacions. Quan es mesura una magnitud, el que tenim és un conjunt de valors que normalment estaran distribuïts al voltant d'un valor central; aquest es pren com a valor real, i la desviació estàndard com a valor de la dispersió. Per tal que siga una estimació acceptable és preferible disposar d'almenys 10 dades. Ara bé, sovint l'error de sensibilitat és superior a la desviació estàndard, per exemple, si es mesura l'amplària d'un full A4 amb un regle de 60 cm graduat en mil·límetres és absurd fer-ne 10 mesures, que donaran sempre el mateix resultat. Només en cal fer una i assignar-li l'error de sensibilitat. Una altra cosa seria mesurar les dimensions d'una habitació amb el mateix regle anterior. Una dosi de bon criteri és, doncs, necessària. D'altra banda, de vegades els resultats de les mesures no es distribueixen normalment, és a dir, seguint-hi una llei gaussiana, i cal aplicar-hi altres mètodes estadístics.

2.2.- Representació gràfica de dades.

El treball ordinari al laboratori consisteix a fer mesures de magnituds i esbrinar si hi ha alguna relació entre elles, bé sense saber d'antuvi si n'hi ha o bé per comprovar una possible relació deduïda teòricament. El procediment més eficaç per veure-ho consisteix a representar gràficament els valors de les dues magnituds considerades (si la dependència és múltiple es poden mantenir constants en l'experiment totes les magnituds tret d'una). Pot ocórrer que els punts obtinguts se situen pròxims a una recta, i llavors la relació entre les magnituds és lineal i cal obtenir els dos paràmetres que la defineixen, el pendent i l'ordenada a l'origen. Si els punts estan molt ben agrupats sobre una recta, el més ràpid és traçar la línia amb un regle i mesurar-ne els paràmetres, però àdhuc en aquest cas, i particularment si els punts es distribueixen de manera difusa, el procediment a emprar és l'anomenat de **mínims quadrats**. Consisteix a prendre el pendent i l'ordenada a l'origen de la recta per a la qual la suma dels quadrats de les diferències de les ordenades obtingudes experimentalment i les de l'esmentada recta siga mínima. Posem (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, N$, els punts obtinguts i $y = mx + n$, l'equació de la recta cercada, on m i n són les incògnites. Cal construir les sumes següents:

$$P = \sum x_i; Q = \sum y_i; R = \sum x_i^2; S = \sum x_i y_i; T = \sum y_i^2$$

i llavors,

$$m = \frac{SN - PQ}{RN - P^2}; \quad n = \frac{RQ - PS}{RN - P^2}$$

Pot ocórrer que la relació entre x i y siga de proporcionalitat, és a dir, $n = 0$, i l'expressió del pendent se simplifica, ja que llavors, $RQ = PS$ i

$$m = \frac{S N - PQ/S}{R N - P^2/R} = \frac{S N - P^2/R}{R N - P^2/R} = \frac{S}{R}$$

Un indicador de la bondat de l'aproximació del núvol de punts a la recta el dona el coeficient de correlació lineal, r , que el dona

$$r = \frac{NS - PQ}{\sqrt{(NR - P^2)(NT - Q^2)}}$$

El seu valor és comprès en l'interval $(-1, 1)$ i com més pròxim a la unitat millor és l'ajust.

Necessitem conèixer també l'error del pendent, i la manera més senzilla és fer una translació de valor n en les ordenades, $y'_i = y_i - n$, amb la qual cosa la nova recta, paral·lela a l'anterior, passarà per l'origen i, per consegüent, $m = S'/R$, on S' és la suma S avaluada amb les y'_i . El càlcul de l'error es fa seguint el procediment ja presentat:

$$\varepsilon(m) = \left| \frac{\varepsilon(S')}{R} \right| + \left| \frac{S' \varepsilon(R)}{R^2} \right|$$

on $\varepsilon(S') = \sum \varepsilon(x_i) y'_i + \sum x_i \varepsilon(y'_i)$ i $\varepsilon(R) = 2 \sum x_i \varepsilon(x_i)$.

Ara bé, no sempre les magnituds estudiades guarden una relació lineal, però l'eficàcia del mètode indueix a aplicar-lo en casos no lineals buscant-hi la parella adient de funcions que sí que depenen linealment. Vegem-ne uns quants exemples:

6. Funció potencial, $y = kx^n$.

Si n és conegut cal representar y enfront de x^n , encara que si $n < 1$ convé fer la gràfica de $y^{1/n}$ en funció de x .

Si n no es coneix s'ha de representar $\log y = n \log x + \log k$ enfront de $\log x$, i el pendent és n i l'ordenada en l'origen $\log k$. Per evitar tabular els logaritmes, el més ràpid és usar el paper doble logarítmic, on els eixos ja són graduats en escala logarítmica.

7. Funció exponencial, $y = ae^{bx}$.

Com que $\log y = \log a + (b \log e)x$, convé representar $\log y$ en funció x , o més senzill, portar els punts al paper semilogarítmic, en el qual només l'ordenada està en escala logarítmica.

8. Doble relació inversa, $y^{-l} = a x^{-l} + b$.

S'ha de representar y^{-l} enfront de x^{-l} .

$$4- y = \frac{x}{a + bx}$$

La gràfica de $1/y$ enfront de $1/x$ té un pendent a i ordenada en l'origen b .

$$5- y = ax^2 + bx + c$$

En aquest cas cal prendre un punt (x_1, y_1) del conjunt i representar $(y - y_1)/(x - x_1)$ en funció de x , cosa que donarà una recta de pendent a i ordenada en l'origen $b+ax_1$. Si c és zero és convenient prendre l'origen com a punt de referència.

$$6- y = \frac{x}{a + bx} + c$$

La gràfica de $(x-x_1)/(y-y_1)$ en funció de x és una recta de pendent $b+ax_1/b^2/a$ i ordenada en l'origen $a+bx_1$.

$$7- y = ae^{bx+cx^2}$$

Llavors cal representar $\log \left[\left(\frac{y}{y_1} \right)^{1/(x-x_1)} \right]$ enfront de x o, una vegada més, usar el paper

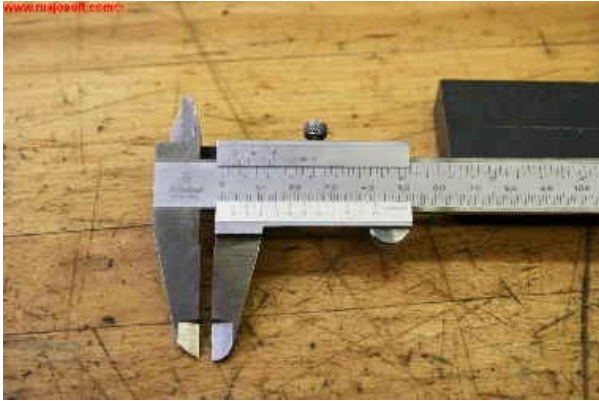
semilogarítmic.

TEMA 3

MESURA DE POSICIONS, TEMPS I MAGNITUDS RELACIONADES

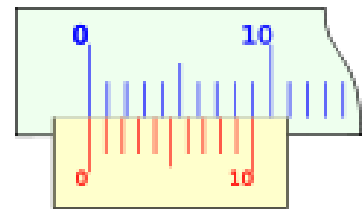
3.1.- Mesura de longituds, superfícies i volums.

A l'hora de mesurar longituds compreses entre uns quants centímetres i com a màxim un metre l'instrument més utilitzat és el regle, graduat normalment en mil·límetres, encara que cada vegada són més comuns els graduats en mitjos mil·límetres. L'únic que cal fer és

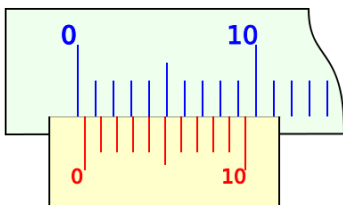


superposar el regle sobre l'objecte a mesurar i restar les lectures de la fi i del principi. Quan les longituds a mesurar són d'alguns centímetres i es vol aconseguir una major precisió hom disposa del **calibre** o **peu de rei**, (fig. 3.1), instrument molt versàtil que serveix per a mesurar gruixos de peces, profunditats i diàmetres de tubs i altres longituds. La major sensibilitat del peu de rei s'aconsegueix mitjançant un **nònius** o

Fig. 3.1 escala mòbil graduada en unitats lleugerament



inferiors a les que hi ha en el regle o escala fixa (Fig.3.2).



(a)

(b)

Fig. 3.2 (a) $m=9$, $n=10$. (b) $x_l=0.4u$.

Si anomenem u i u' les unitats de les escales fixa i mòbil respectivament, la sensibilitat de l'aparell es defineix com $s = u - u'$. Suposem que l'extrem de l'objecte a mesurar cau entre dues divisions de l'escala fixa; llavors, la longitud serà $x = x_0 + x_l$, on x_0 és un nombre enter de divisions i $x_l < u$. Portem ara l'origen de l'escala mòbil a l'extrem de l'objecte i comptem el nombre, N , de divisions que hi ha fins a la primera coincidència amb una divisió de la fixa; llavors

$$x_l + Nu' = Nu \quad \text{i} \quad x_l = N(u - u') = Ns$$

Es tria sempre u' com una fracció racional de u : $u' = (m/n)u$, amb $m < n$; així,

$$s = (n - m)u/n \quad \text{i} \quad x_l = N(n - m)u/n$$

Per exemple, si les divisions de l'escala fixa són mil·límetres i es pren $u' = (9/10)u$, la sensibilitat serà de 0,1 mm, i l'excés x_l per damunt, l'última divisió serà igual a tantes dècimes de mil·límetre com divisions es compten fins a la primera coincidència.

Exercici. Prengueu un regle graduat en mil·límetres i el seu nònius, que té una longitud de 49 mm i està dividit en 50 divisions. Una certa mesura proporciona una lectura de 23 mm i escaig, tal que la primera coincidència entre les escales es dona a les 14 divisions. Trobeu la sensibilitat de l'aparell i el valor de la mesura.

Un altre aparell que serveix per mesurar gruixos petits és el **cargol micromètric** o **pàlmer** que essencialment consta d'un cargol de pas de rosca, h , conegut, amb el qual es gradua una escala fixa. Per augmentar-ne la sensibilitat, al tambor que fa girar el cargol se li afexeix un disc dividit en N divisions, essent normalment $N = 50$ o 100 . Aleshores, la sensibilitat és h/N (Fig.3.3).



Si hom vol mesurar longituds més petites és imprescindible usar microscopis i aplicar els mètodes anteriors per determinar els excessos sobre una divisió. D'altra banda, si es vol conèixer el gruix molt

Fig.

3.3 menut d'un objecte transparent a un tipus de radiació hom pot fer ús de mètodes interferomètrics, basats en l'observació de màxims i mínims de la intensitat transmesa en fer variar la freqüència de la llum. En efecte, el coeficient de reflexió per a una pel·lícula de gruix d i índex de refracció n val:

$$R = \frac{4r \cos^2 k_1 d}{1 + r^2 + 2r \cos 2k_1 d}$$

on $r = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2$, $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ i $k_1 = 2\pi/\lambda_1 = n\omega/c$. La transmissió és màxima quan $R = 0$, ço és, per a

$$\omega = \omega_m = \frac{(2m+1)\pi c}{2nd}$$

Entre dos màxims consecutius hi ha una diferència de freqüència $\Delta\omega = \pi/nd$, o bé una diferència de longitud d'ona $\Delta\lambda = \lambda^2/2nd$, relació que ens permet deduir d . L'error de la mesura depèn de la precisió amb què es coneixen l'índex de refracció i la longitud d'ona; si hom usa la línia roja del Cd, $\lambda = 6,438 \cdot 10^{-7}$ m, que es coneix amb una precisió d'una part en $1,6 \cdot 10^7$, l'error relatiu d'aquesta és $1/1,6 \cdot 10^7 = 6,25 \cdot 10^{-8}$.

Quan es descendeix al nivell atòmic cal emprar procediments cada vegada més indirectes però d'una fiabilitat extraordinària; per exemple, les estructures cristal·lines es determinen per difracció de raigs X.

Per a les distàncies intermèdies, com ara les que es donen en l'agrimensura, se solen usar cintes mètriques. Tanmateix, si un dels extrems no és accessible, per exemple, si hi ha pel mig un riu, hom ha de recórrer al mètode de triangulació (Fig. 3.4). Consisteix a escollir un objecte fix, A, de referència en el costat inaccessible, i alinear-hi, en la direcció de la distància a mesurar, dues estaques, B i C. Tot seguit, en direcció perpendicular a BC i des de B es claven altres dues estaques, D i E, a distàncies BD i DE conegudes. Llavors es traça per E la perpendicular a BE, és a dir, paral·lela a AC, i sobre

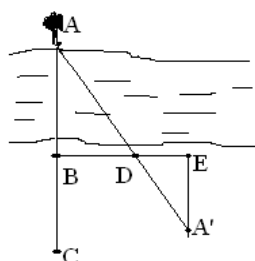
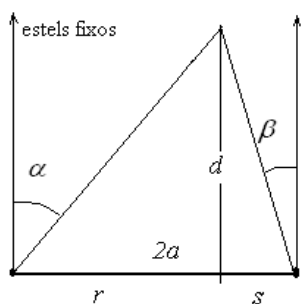


Fig. 3.4 aquesta se cerca el punt A' alineat amb D i A. Com

que els triangles ABD i A'ED són semblants, es pot determinar la distància $AB = (BD/DE)A'E$.

Distàncies terrestres més grans que les que acabem de descriure i moltes distàncies astronòmiques es poden determinar mitjançant la paral·laxi, que és el canvi de posició relativa d'un objecte pròxim respecte d'un altre llunyà quan s'observa des de dos punts diferents. Per exemple, poseu un dit davant dels ulls, mireu-lo tancant alternativament un ull i l'altre i veureu com la seua posició relativa a un objecte apartat canvia. Òbviament, el desplaçament depèn de la separació entre els dos punts d'observació, en aquest cas els dos ulls, que formen l'anomenada línia de base. Si aquesta separació és molt gran, es poden avaluar distàncies per a objectes molt llunyans. En astronomia, per mesurar les distàncies dels planetes es prenen línies de base al llarg d'un hemisferi. Per a un astrònom situat a la Terra, la línia de base més gran de què pot disposar és el diàmetre de l'eclíptica; hi ha estels que són tan lluny que llur posició no canvia àdhuc al llarg de milers d'anys: són els anomenats estels fixos i es prenen com a referència per determinar les distàncies dels estels més pròxims. Allò que es mesura



són els angles α i β sota els quals es veu l'estel respecte dels estels fixos en dues posicions de la Terra separades per mig any (Fig. 3.5). Tal com es veu en la figura, s'acompleix que

$$d = r \cot \alpha = s \cot \beta; \quad r + s = 2a$$

on a és el semidiàmetre de l'òrbita terrestre.
D'ací resulta

$$d = 2a / (\tan \alpha + \tan \beta).$$

Fig. 3.5

La mesura de superfícies i

volums es basa en el mateix concepte en què s'inspira la mesura de longituds: triar una unitat convenient i comptar quantes vegades cap dins la superfície o volum que es vol conèixer. Les unitats que s'han de prendre són quadrats o daus, segons el cas, tan petits com calga per tal de limitar l'error de la mesura dins els marges establerts. Com que aquest mètode directe en ocasions no és gaire pràctic, sobretot quan es tracta de volums, s'han ideat procediments alternatius. Si es tracta de superfícies o volums que es poden reduir a combinacions de figures de les qual es coneixen les fórmules matemàtiques per a l'àrea o el volum, el més senzill és mesurar les longituds corresponents i aplicar les expressions esmentades. En particular, si la superfície es pot descompondre en triangles arbitraris, l'àrea de cadascun d'ells es pot determinar mesurant-ne els costats i aplicant-hi la fórmula d'Heró (s. I a. J. C.):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

on a , b i c són els costats i $p = (a+b+c)/2$, el semiperímetre. Per a una superfície irregular hom pot fer una còpia de paper de densitat i gruix coneguts, pesar-la i deduir-ne l'àrea. Si el volum incògnit és irregular es pot avaluar omplint-lo d'aigua i mesurar-ne després el volum, per exemple amb una proveta o pesant-la.

3.2.- Determinació de posicions, velocitats i acceleracions.

A fi d'analitzar un moviment, el primer que necessitem és un procediment per mesurar el temps. Totes les mesures d'interval temporal tenen com a referència la comparació amb un fenomen periòdic, el període del qual és ben conegut; com més petit siga aquest, menor serà l'error de la mesura, però, igual que passa amb les mesures de longitud, el procediment més convenient depèn de la durada a mesurar. En els rellotges mecànics la part del mecanisme que té un moviment periòdic és un pèndol o un volant, les oscil·lacions del qual es transformen en un moviment circular mitjançant un sistema de rodes dentades; a més, disposen d'un sistema regulador de les oscil·lacions. L'energia la subministra la gravetat o una molla. En canvi, en els rellotges elèctrics el volant el mou un electroimant alimentat per una pila. Els rellotges electrònics aprofiten la regularitat de les oscil·lacions d'un diapasó (360 Hz) o d'un cristall de quars (8192 Hz) i llur estabilitat s'aconsegueix amb un circuit elèctric. Aquests tipus de mecanismes són els usats en els **cronòmetres** que, a més a més, disposen d'un botó d'engegada i parada. Llur precisió es troba al voltant de les dècimes de segon per

dia. Finalment, els rellotges atòmics es basen en l'estabilitat de la freqüència de les transicions entre nivells electrònics de determinats àtoms; un cristall de quars genera una ona electromagnètica que absorbeixen els àtoms quan la freqüència coincideix amb la de la transició atòmica; si l'oscil·lador es desvia l'energia no s'absorbeix, passa a través dels àtoms i mou un servomecanisme que corregeix la freqüència d'oscil·lació. La seua precisió arriba a menys d'un segon en 10 segles.

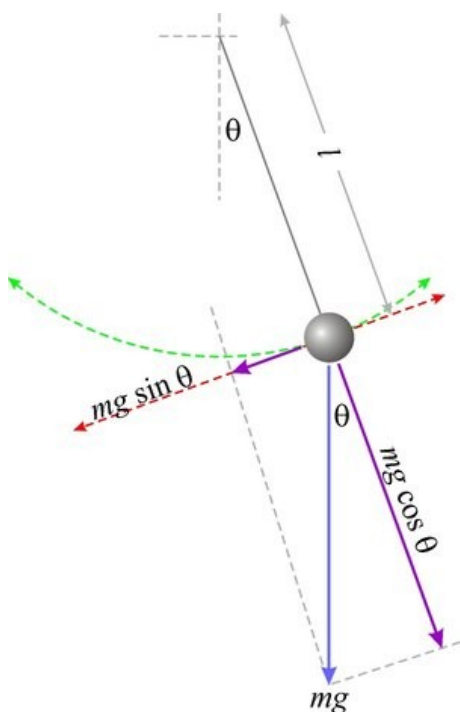
Quan s'utilitza un cronòmetre manual, allò que més afecta la precisió de la mesura és la rapidesa de l'operari. Aquest inconvenient es pot eliminar en molts casos fent ús d'una **cèl·lula fotoelèctrica** que engega o atura el cronòmetre segons si passa o no la llum. En les mesures temporals relatives a un pèndol la combinació del cronòmetre i la cèl·lula pot prendre diverses modalitats:

Σ Modalitat pèndol. El cronòmetre s'engega quan el feix de llum s'interromp per primera vegada i es para a la tercera; així dóna una mesura del període.

Σ Modalitat impuls. Compta les vegades que s'ha interromput el feix.

Ambdues modalitats permeten determinar el període del pèndol amb el qual avaluar l'acceleració de la gravetat mitjançant la coneguda relació

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



Ara bé, aquesta expressió és només vàlida per a amplituds petites, tals que es pugui aproximar el sinus de l'angle màxim per l'angle. Per a amplituds majors l'equació del moviment, prenent com a variable l'angle \$\theta\$ respecte de la vertical, és (Fig. 3.6)

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

de la qual hom obté una integral primera multiplicant-hi per \$\dot{\theta} = d\theta/dt\$, i que no és sinó l'expressió de la conservació de l'energia:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega^2 \cos \theta \right) = 0$$

on \$\omega^2 = g/l\$. En resulta

$$\dot{\theta} = \sqrt{2\omega} \sqrt{(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

on \$\theta_0\$ és l'amplitud. Se'n desprèn que

Fig. 3.6

el període equival a

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

Expressant-hi els angles en termes dels angles meitat i fent el canvi de variable

$$\sin(\theta/2) = \sin(\theta_0/2) \sin \varphi$$

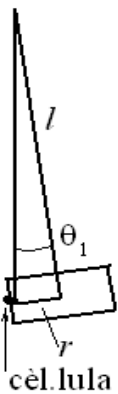
s'obté

$$T = \frac{1}{\omega} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2 \phi}}$$

que és una integral el·líptica de primera espècie, els valors de la qual són tabulats. Si l'amplitud de les oscil·lacions no és gaire gran es pot desenvolupar l'integrand en sèrie de potències i trobar que el període equival a:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right]$$

c) Modalitat porta (gate) (Fig. 3.7). El cronòmetre comença a comptar quan el feix s'interromp i es para quan hi torna a passar llum.



S'utilitza per mesurar l'interval curt de temps que triga a passar el pèndol per davant la cèl·lula i permet avaluar la velocitat instantània del pèndol. Estrictament, qualsevol mesura d'una velocitat instantània ho és d'una velocitat mitjana en un curt interval de temps. Així, si hom vol determinar la velocitat màxima del cos pendular, posat un cilindre de radi r , el que el cronòmetre en modalitat *gate* proporciona és el temps t_l que triga a passar per davant de la cèl·lula i, per divisió, $v_m = 2r/t_l$, a comparar amb la màxima, v_0 . D'acord amb el que s'ha dit adés,

$$v_0 = l \dot{\theta}_0 = 2l\omega \sin(\theta_0/2)$$

i

Fig. 3.7
$$t_l = \int_0^{2\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega} \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

on $\theta_l \cong \text{tg } \theta_l = r/l$. Com que θ_l és petit, l'integrand es pot desenvolupar en sèrie després de posar-lo en termes dels angles meitat; la integració és immediata i dona

$$t_l = \frac{2\theta_1}{\dot{\theta}_0} \left[1 + \frac{\theta_1^2}{6 \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} \right]$$

D'ací s'obté la relació entre la velocitat màxima i la mesurada

$$v_0 = v_m \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{r}{l \sin \frac{\theta_0}{2}} \right)^2 + \dots \right]$$

Una manera d'analitzar un moviment és fer ús d'un **estroboscopi**, instrument que permet visualitzar el cos mòbil a intervals regulars de temps. Una primera versió consisteix en una làmpada de flaix que s'encén un breu instant diverses vegades de manera periòdica. Així, per exemple, si opera en una cambra fosca on es mou l'objecte en presència d'una càmera fotogràfica amb l'objectiu obert permanentment, a la pel·lícula en quedarà gravada la trajectòria. Un altra classe d'estroboscopi és simplement un disc giratori amb esclatxes que substitueix la làmpada del cas anterior i s'utilitza per mesurar velocitats angulars. Imaginem en primer lloc que el disc giratori té només una esclatxa i es col·loca de manera que a través seu es pot veure un senyal marcat en la roda de la qual es vol conèixer la velocitat de rotació. Si els períodes de rotació dels dos discs són iguals la posició de la marca coincidirà cada cop amb la de l'esclatxa i farà l'efecte que no es mou. Ara bé, si l'estroboscopi té N esclatxes la coincidència esmentada es donarà quan la velocitat angular d'aquest siga igual ωN , molt menor que la velocitat angular a mesurar, ω . Tornem al cas senzill d'una esclatxa: la

immobilitat aparent de la marca no ocorre només quan ω iguala la velocitat angular de l'estroboscopi, ω_e , sinó que es produeix sempre que en siga un múltiple enter, $\omega = \omega_e, 2\omega_e, 3\omega_e \dots$ la qual cosa significa que per conèixer ω el que cal és anar fent créixer ω fins arribar al màxim valor per al qual es veu quieta la marca, i aquest serà el valor de ω (ω/N si hi ha N esclatxes).

Per a moviments rectilinis, com ara el que té lloc sobre un carril d'aire al laboratori, s'utilitza el **sonar**, aparell que s'usa molt sovint per fer radiolocalització submarina. Consisteix en un emissor i receptor d'ultrasons amb un microprocessador que avalua les variables objecte d'estudi. Per poder fer el seguiment de l'objecte mòbil el sonar ha d'enviar impulsos ultrasònics de manera periòdica, posem, amb un període T ; de fet, els impulsos són trens d'ona de curta duració, τ , i aquests intervals temporals determinen els límits de treball de l'aparell. En efecte, el temps que triga un tren d'ones a arribar al mòbil des que s'emet i, en ser reflectit, tornar al sonar val $2r/v$, si r és la distància a què es troba el mòbil i v la velocitat del so. Com que cal identificar singularment cada tren d'ones, és a dir, cal que arribe al detector abans que surta el tren següent, el temps calculat ha de ser com a màxim el període, T ; en altres paraules, el període fixa la màxima distància a què pot estar el mòbil del sonar, que és $D=vT/2$. D'altra banda, per tal que no s'encavalque en el detector el principi d'un tren d'ones amb la seua part final, cal que el temps invertit a anar i tornar supere la durada del tren, ço és, la mínima distància a què es pot trobar el mòbil és $d=v\tau/2$. Valors típics en un aparell de laboratori són $\tau=2$ ms i $T=14$ ms, els qual fixen les distàncies mínima i màxima d'operació en $d=34$ cm i $D=238$ cm. Amb aquest procediment, queden automàticament registrades les posicions del mòbil a intervals T i, per derivació, la velocitat i l'acceleració.

Les acceleracions de vehicles poden determinar-se directament amb els **acceleròmetres**, que estan basats en la comparació amb l'acceleració de la gravetat, g : una massa suspesa d'un punt solidari del vehicle que porta una acceleració a es desvia de la vertical formant un angle α tal que $tg\alpha = a/g$. De fet, la massa és l'element pesant d'un pèndol físic que en l'extrem oposat a la massa disposa d'una agulla que marca sobre un quadrant l'angle en què es desvia el pèndol. Una variant d'aquest aparell aprofita l'orientació de la superfície lliure d'un líquid, que ha de ser normal a la força efectiva (gravetat més força d'inèrcia, $-ma$) que actua sobre el fluid; açò significa que la perpendicular a dita superfície forma un angle α amb la plomada, que és el mateix que forma la superfície lliure amb l'horitzontal, tal que $tg\alpha = a/g$.

També es pot mesurar l'acceleració, sense comparar-la amb la gravetat, determinant la pressió que produeix la força d'inèrcia sobre una superfície coneguda mitjançant un cristall piezoelèctric, el funcionament del qual s'explicarà en parlar de les mesures de pressió.

Finalment, un aparell extremadament versàtil que permet estudiar els moviments periòdics és l'**oscil·loscopi**. La versió més senzilla consta d'un tub de raigs catòdics on el feix d'electrons es pot desviar tant verticalment com horitzontalment amb el camp elèctric respectiu creat per unes plaques a les quals hom aplica una diferència de potencial elèctric. Òbviament, el que es necessita en primer lloc és transformar la variable mecànica a determinar en un senyal elèctric proporcional; aquesta tensió s'introdueix en les plaques de desviació vertical i fa que la taca puntual que el feix produeix sobre la pantalla es desplace proporcionalment amunt o avall. En aquest sentit, l'oscil·loscopi funciona com un voltímetre i realment, si la variable analitzada és estàtica, resultaria més convenient emprar-hi un bon voltímetre en el seu lloc. L'interès de l'oscil·loscopi rau en la possibilitat de donar representacions de variables dinàmiques periòdiques, per a la qual cosa cal aplicar-hi simultàniament a les plaques de desviació horitzontal una tensió en forma de dent de serra, és a dir, proporcional al temps durant un interval T , anomenat base de temps, que es repeteix consecutivament. El circuit que genera la dent de serra es troba incorporat en tots els oscil·loscopis. Així es té una desviació horitzontal, $x = vt$, al mateix temps que una desviació vertical, $y = f(t)$, on f és la variable periòdica estudiada. En definitiva, el feix descriu sobre la pantalla una corba $y = y(x) = f(x/v)$ que és una reproducció de la funció estudiada. Cal afegir-

hi que perquè aquesta representació es mantinga estacionària el període de la variable ha de ser un divisor de la base de temps i han d'anar sincronitzats, cosa que l'aparell permet controlar.

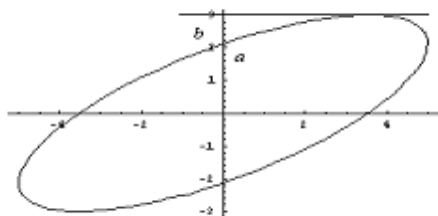
Tal com ja s'ha dit, l'oscil·loscopi és un instrument amb una multiplicitat de possibilitats; per exemple, pot servir per a mesurar l'amplitud d'una variable harmònica; el seu període mitjançant la base de temps o la diferència de fase entre dues d'elles de la mateixa freqüència. Aquesta última es pot fer de diverses maneres, que passem a descriure:

- Amb un oscil·loscopi proveït de dos canals s'introdueix cada senyal per cadascun d'ells i es veuran a la pantalla dues corbes sinusoidals; la diferència de temps entre dos màxims o dos zeros consecutius d'un senyal i de l'altre, llegida en l'escala temporal, proporciona la diferència de fase multiplicant-ho per la freqüència angular.
- Si en comptes d'emprar l'eix horitzontal com a coordenada temporal s'introdueix un senyal en l'eix vertical i l'altre en l'horitzontal, la figura resultant és una el·lipse, que pot degenerar en una circumferència o un recta, i l'orientació de la qual ens dóna el desfasament. En efecte, si els moviments harmònics són

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad y = y_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

en eliminar el temps s'obté l'equació

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$



que correspon a una el·lipse, el semieix major de la qual forma un angle χ amb l'eix d'abscisses de manera que (fig. 3.5)

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{2x_0 y_0}{x_0^2 - y_0^2} \cos \varphi \quad \text{Fig.}$$

3.5.- $x_0=5, y_0=3, \varphi=45^\circ, \chi=26,49^\circ$.

Quan $\varphi=0, \pi$, l'equació de l'el·lipse es redueix a la d'una recta de pendent $\operatorname{tg} \chi = \pm y_0 / x_0$; quan $\varphi = \pi/2$ l'el·lipse es refereix al seus eixos principals, i si a més les amplituds són iguals es redueix a una circumferència.

- Sobre l'el·lipse anterior cal mesurar l'altura $y = a$ a què talla a l'eix vertical i també l'ordenada $y = b$ corresponent al punt de tangent horitzontal. Les equacions paramètriques de la corba ens diuen que

$$a = \pm y_0 \sin \varphi \quad \text{i} \quad b = \pm x_0 \cos \varphi$$

i, per consegüent, $\sin \varphi = a/b = 2a/2b$. Convé prendre les distàncies entre els extrems, $2a$ i $2b$ per tal de reduir l'error relatiu a la meitat.

TEMA 4

MESURA DE DENSITATS. CENTRE DE GRAVETAT

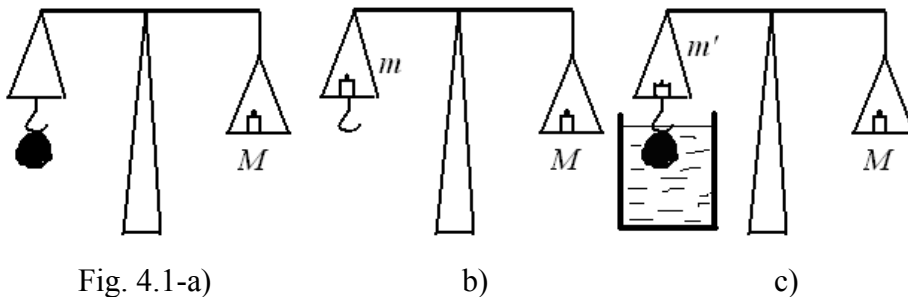
4.1.- Densitat de sòlids i líquids.

Atès que la densitat es defineix com la massa per unitat de volum, la seua determinació implica dues mesures: de massa i de volum, i la d'aquest és la que presenta major dificultat i la que es pot fer pels procediments ja indicats. En general, les mesures de densitats es basen en l'aplicació del **principi d'Arquimedes**, que diu que quan un sòlid es troba en el si d'un fluid experimenta un empenyiment cap amunt igual a pes del fluid que ocuparia el volum del sòlid. Pràcticament sempre que es mesura la densitat d'un sòlid, el fluid emprat és l'aigua; llavors es parla d'empenyiment hidrostàtic que, si ρ_a és la seua densitat, pren el valor $E_a = m_a g = \rho_a V g$, on V és el volum i g l'acceleració de la gravetat. Llavors es té que

$$\rho = (m/V) = m\rho_a g / V\rho_a g = P\rho_a / E_a = m \rho_a / m_a \quad \text{i} \quad \rho/\rho_a = m/m_a$$

és la densitat relativa. Normalment les mesures de densitats de sòlids tenen lloc en presència de l'atmosfera i, d'acord amb el principi d'Arquimedes, estaran afectades per l'empenyiment atmosfèric de manera que, si cal, s'hi hauran d'introduir les correccions adients. Depenent de les condicions físiques en què es troba el sòlid s'utilitzen diferents procediments.

Balança hidrostàtica. No és sinó una balança amb braços desiguals, un per col·locar



les peces i l'altre amb un ganxo d'on es pot suspendre el sòlid en estudi, la densitat del qual ha de ser major que la de l'aigua (fig. 4.1). El procediment consta de tres passos: a) Es penja el cos i s'equilibra la balança posant en l'altre braç unes peces de massa M , que ja no es toquen en la resta del procés; es tindrà que $M = m + \Delta m$, on m és la massa del cos, desconeguda, i Δm la diferència de massa entre el dos braços. b) Es lleva el cos i s'equilibra de nou la balança col·locant-hi les peces necessàries, que ens donaran el valor de m . c) Es penja un altra vegada el cos i s'introdueix dins d'una proveta o vas amb aigua fins que quede totalment submergit, i se substitueixen les peces m per unes altres m' que restableixen l'equilibri; ara es tindrà que $M = m + \Delta m + m' - m_a$, on m_a és la massa de l'aigua corresponent al volum del sòlid. Se'n dedueix que $m' = m_a$ i, en conseqüència, que $\rho/\rho_a = m/m'$.

La balança hidrostàtica pot emprar-se per mesurar densitats relatives de líquids només posant-hi un sòlid determinat i prenent nota de les masses m' i m'' que equilibren la balança en submergir el sòlid en aigua i en el líquid; el quocient m''/m' és la densitat relativa.

En determinacions de precisió, com que la massa del cos es mesura en l'aire, cal introduir-hi la correcció de l'empenyiment aerostàtic. Designem, doncs, com a m la massa que es mesuraria en el buit, m_a la que és afectada per l'aire i m_l la corresponent al sòlid submergit en el líquid, és a dir, $m_l = m - m'$, essent m' la ja definida. Entre elles hi ha les relacions:

$$m = m_a + \rho_a V \quad \text{i} \quad m = m_l + \rho_l V$$

d'on aïllem $m_l = m - \rho_l V = m_a + (\rho_a - \rho_l) V$ i $V = (m_a - m_l) / (\rho_l - \rho_a)$

i, finalment,

$$\rho = \frac{m_a}{m_a - m_l} (\rho_l - \rho_a) + \rho_a$$

Si no es considera l'empenta de l'aire hom obté la densitat ρ_{sc} sense corregir,

$$\rho_{sc} = \frac{m_a}{m_a - m_l} \rho_l$$

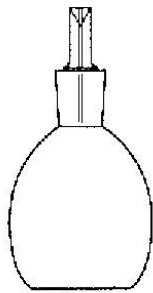
que coincideix, evidentment, amb l'anterior, i en termes d'ella

$$\rho = \frac{\rho_{sc}}{\rho_l} (\rho_l - \rho_a) + \rho_a = \rho_{sc} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_l} \right) + \rho_a$$

Com que $\rho_a = 1 \text{ kg/m}^3$ i normalment el líquid és l'aigua, $\rho_l = 10^3 \text{ kg/m}^3$, es té

$$\rho = (0,999\rho_a + 1) \text{ kg/m}^3$$

Exercici: Un bloc d'alumini pesa $1,00 \pm 0,01 \text{ N}$ en el buit i $0,63 \pm 0,01 \text{ N}$ quan se submergeix dins l'aigua, la densitat de la qual és $\rho_l = (1,00 \pm 0,01) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Esbrineu la densitat de l'alumini en el buit i en l'atmosfera.



Picnòmetre (fig. 4.2). Serveix per a mesurar densitats de sòlids insolubles en aigua i que es puguin polvoritzar o reduir a trossets que passen per la boca del picnòmetre o matràs de coll fi amb un senyal de nivell; per augmentar-ne la sensibilitat el nivell es fa sobre un tub estret que s'acobla amb un tap esmerilat. Els passos a seguir són semblants als de l'ús de la balança hidrostàtica. En un plat d'una balança de braços iguals es col·loquen el cos i el matràs ple d'aigua fins al nivell, i en l'altre les peces M que l'equilibren. Substituïm el cos per les peces m que tornen a equilibrar la balança, i ja tenim la massa del cos. Ara introduïm el cos dins el picnòmetre i

Fig. 4.2 tirem l'aigua que sobra fins a enrasar-la amb el nivell; com que manca aquesta aigua respecte de l'ordenació primera, caldrà afegir en aqueix plat les peces m' que equilibren la balança i que mesuraran la massa de l'aigua eliminada. De nou es té $\rho/\rho_a = m/m'$.

Una variant que s'empra per mesurar densitats de líquids és el picnòmetre d'Ostwald, en el qual el capil·lar amb nivell és la continuació del tub recipient. Cal conèixer-ne el pes i el volum, i així, pesant-lo ple de líquid se'n determina la densitat. El volum de l'instrument s'obté omplint-lo de mercuri i pesant-lo.

per
es



Densímetre. Consisteix en un flotaador que té en la part inferior una cistella on pot posar-se el cos, en la superior un plat i en la zona intermèdia un senyal de nivell. Tot això entra en una proveta amb aigua. Primerament es col·loca el cos en el plat i també les peces necessàries enrasar el senyal amb el nivell de l'aigua. Se substitueix el cos per les peces m que, de nou, l'anivellen. Finalment, es posa el cos en la cistella i torna a anivellar amb les peces m' . Una vegada més, $\rho/\rho_a = m/m'$. També aquí es pot canviar l'aigua per un líquid i llegir les masses per obtenir-ne la

Fig. 4.3 densitat relativa, encara que per simplificar el procés el

flotaador porta una escala que marca ja directament la densitat relativa; aquest model de densímetre s'anomena **areòmetre** (fig. 4.3).

Balança de Mohr-Westphal. Consisteix en una balança de braços desiguals que s'utilitza per mesurar densitats de líquids (fig. 4.4). Del braç de mesura, proveït de 10 divisions iguals, penja un termòmetre que fa de llast i s'introdueix dins una proveta que conté el líquid. A més, disposa d'un joc de peces, reiters o cavallers, en forma de U invertida amb ganxets als extrems, que es poden posar al llarg del braç. N'hi ha de valor unitari, dècim i centèsim. En primer lloc es posa aigua en la proveta i s'equilibra la balança amb el llast submergit i amb una peça unitària en la divisió de l'extrem. Això marca la densitat unitat, que correspon a una equació d'equilibri



Fig. 4.4

amb un líquid més dens que l'aigua, posant-hi un altre reiter unitat en la n -sima divisió comptada a partir del fulcre. La condició d'anul·lació del moment s'escriu ara

$$M + [(1 + 0,1 n) m_r + m_i - \rho_l V_i]gd = 0$$

on ρ_l és la densitat del líquid. Restant ambdues equacions i dividint-hi per ρ_a s'obté la densitat relativa

$$\rho_l/\rho_a = 1 + 0,1 n(m_r/\rho_a V_i)$$

Es tria la massa del reiter unitari de manera que $m_r/\rho_a V_i = 1$ i així es té que la densitat relativa es llegeix com la unitat més tantes dècimes com indica la posició del cavaller. Si la densitat incògnita és menor que la de l'aigua es pot repetir la deducció anterior només canviant-hi $1+0,1n$ per $0,1n$ i la densitat relativa la donen n dècimes. Quan la condició d'equilibri exigeix afegir reiters més menuts, llurs posicions donen les centèsimes i mil·lèsimes respectivament.

4.2.- Densitat de gasos.

Els gasos són molt compressibles i se'n sol donar la densitat en condicions normals, és a dir, a 1 atmosfera de pressió i a 273 K, condicions en les quals es pot fer ús de l'equació dels gasos perfectes

$$pV = mRT/M$$

on p és la pressió, V el volum, m la massa, M la massa molecular, T la temperatura i R la constant dels gasos perfectes. Se'n dedueix que

$$\rho = m/V = pM/RT$$

d'on resulta que la mesura de la densitat es redueix a determinar la pressió i la temperatura. Amb més precisió es pot determinar la densitat relativa respecte d'un altre gas amb la **balança aerostàtica** que no és sinó una balança de precisió situada dins una cambra on es poden introduir els gasos i controlar llur pressió; en un braç hi ha un recipient buit o flotador que experimenta l'empenyiment del gas que s'hi pose. Normalment la referència es fa respecte del nitrogen a pressió atmosfèrica. A aquesta pressió, la densitat relativa és igual al quocient de les masses moleculars

$$\rho/\rho_N = M/M_N \quad (p = p_a)$$

Per tal de mesurar la densitat del gas a pressió p_a s'equilibra la balança amb el gas i amb nitrogen a pressions p i p_N , necessàriament diferents. L'equilibri significa que llavors

$\rho(p) = \rho_N(p_N)$, ço és, $pM/RT = p_N M_N/RT$, o bé, $pM = p_N M_N$. Així, es tindrà

$$\frac{M}{M_N} = \frac{p_N}{p}$$

i, com que

$$\frac{M}{M_N} = \frac{\rho}{\rho_N} \quad (\text{per a } p = p_a)$$

resulta, finalment, que

$$\frac{\rho}{\rho_N} = \frac{p_N}{p}$$

$$M + (m_r + m_i - \rho_a V_i)gd = 0$$

on M representa el moment dels dos braços totalment nus, m_r i m_i són les masses del reiter i del llast respectivament, ρ_a la densitat de l'aigua, V_i el volum del llast i d el braç de la balança.

A continuació se substitueix l'aigua pel líquid i es torna a equilibrar posant els reiters on calga. Si el líquid és més dens que l'aigua caldrà afegir-ne més, mentre que si és més lleuger s'haurà de desplaçar el primer cavaller i afegir-hi els altres divisors

necessaris. Suposem que s'aconsegueix l'equilibri,

la densitat relativa coincideix amb el quocient invers de les pressions que porten la balança a l'equilibri per a cada gas.

4.3.- Centre de gravetat.

El centre de gravetat d'un cos es defineix com el punt on s'aplica la força resultant (pes) dels pesos elementals de cada element de massa. En altres paraules, és el punt respecte del qual la suma de moments dels pesos elementals és igual a zero o, d'una altra manera, és el punt on cal aplicar el pes perquè el seu moment respecte d'un punt arbitrari, O, siga igual a la suma dels moments elementals. Si es pren O com a origen de coordenades, la posició del centre de gravetat, \mathbf{r}_{cg} , la dóna

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{g}_i = \mathbf{r}_{cg} \wedge \sum_i m_i \mathbf{g}_i$$

Com que el camp gravitatori que origina el pes és uniforme, aquesta definició fa coincidir el centre de gravetat amb el centre de masses:

$$\mathbf{r}_{cg} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Si el cos té un volum amb una superfície límit definida analíticament, el més convenient és determinar el centre de gravetat matemàticament, mentre que si el contorn del cos no admet representació matemàtica cal operar experimentalment. Si es tracta d'una figura plana se suspèn des de dos punts diferents, i el punt on es tallen les dues verticals ens dóna el centre de gravetat. Una alternativa és anar provant de col·locar-lo sobre una agulla de manera que es quede en equilibri. Per a un sòlid tridimensional caldria fer el mateix però suspenent-lo des de tres punts; resulta evident que en aquest cas la intersecció de les tres rectes no és gaire fàcil de trobar.

TEMA 5

MESURA DE FRICCIÓ I VISCOSITAT

5.1.- Coeficients de fricció: estàtic, dinàmic i de rodolament.

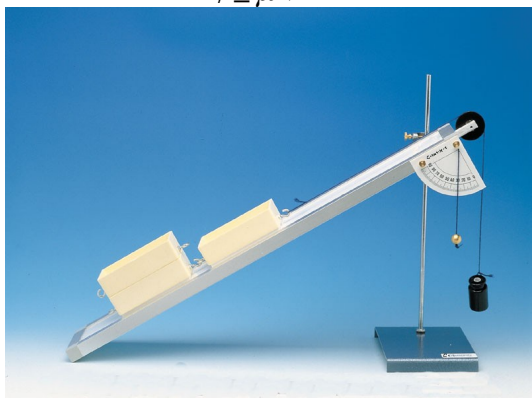
Quan dos cossos són en contacte apareixen forces entre ells que tenen el seu origen en les interaccions entre àtoms o molècules veïnes. La forma d'aquestes interaccions és, en general, molt complexa, i conceptualment és del mateix tipus que les que ocorren internament entre molècules d'un únic sòlid, anomenades forces elàstiques; depenen molt fortament de la distància que les separa i del tipus de substància, raons per les quals les de fricció són més lleugeres i canvien quan ho fan els cossos en contacte; en particular, són més fortes entre cossos idèntics que si són diferents, perquè l'acoblament és millor en el primer cas. Tal com veurem en estudiar les forces elàstiques i viscoses, les magnituds que intervenen en les lleis físiques que les descriuen són les tensions o forces per unitat de superfície, i el mateix passa amb les forces de fricció.

Considerem un cos que descansa sobre un altre horitzontalment. Si tractem de desplaçar-lo aplicant-li una força notarem que mentre aquesta no arribi a un cert valor el cos no es mou. La força de fricció, F_r , i, en particular la màxima, que és igual i oposada a la mínima que hi cal aplicar perquè el cos es moga, ha de ser funció de la distància microscòpica entre les superfícies en contacte que, al seu torn, dependrà de la força que es fa perpendicularment a elles i les manté en contacte. Com més gran siga aquesta força normal, N , més juntes estaran les superfícies dels cossos i major serà la força de fricció. Notem que la causa és una força normal a les superfícies en contacte i l'efecte hi és tangencial, la qual cosa reflecteix el caràcter tensorial de la relació entre aquestes magnituds, relació que es redueix a una simple proporcionalitat entre la tensió màxima de fricció, σ_{rm} , i la normal, σ_n :

$$\sigma_{rm} = \mu \sigma_n$$

on μ és el coeficient de fricció que, evidentment, depèn de la natura i de les característiques de les superfícies en contacte; en particular, quan la composició dels dos cossos en contacte és la mateixa μ és major, fet que s'interpreta perquè l'acoblament entre les superfícies és millor. Ara bé, com que la superfície sobre la qual es consideren ambdues forces és la mateixa, aquesta llei experimental se sol escriure

$$F_r \leq \mu N$$



Quan la força aplicada supera aquest valor el cos es mou i, en principi, el moviment estarà determinat per la resultant de les forces aplicades i la de fricció màxima; tanmateix, es comprova que quan hi ha desplaçament relatiu de les superfícies en contacte la força de fricció minva, tot mantenint la proporcionalitat amb N . Això significa que cal introduir-hi dos coeficients de fricció, un d'estàtic, μ_e i un altre de dinàmic μ_d . El fet experimental que μ_d siga

Fig.5.1

menor que

μ_e s'entén perquè les forces entre les molècules veïnes en moviment relatiu són menors que si són en repòs. A més, μ_d depèn de la velocitat, però fins a uns quants metres per segon es pot considerar constant.

Per mesurar el coeficient de fricció estàtic entre dues superfícies se situa un cos sobre la superfície plana de l'altre, de manera que aquesta forme un pla inclinat (fig. 5.1), la inclinació del qual, θ , es pot fer variar. Quan el cos comença a desplaçar-se la força motriu, que és la component tangencial del pes, $mg \cos \theta_c$, ha igualat la de fricció màxima, mentre que la normal és $mg \sin \theta_c$. Resulta així que

$$\mu_e = \operatorname{tg} \theta_c$$

Si volem mesurar el coeficient de fricció dinàmic només ens cal determinar l'acceleració de baixada pel pla inclinat per a un angle $\theta > \theta_c$. L'equació del moviment proporciona l'acceleració, a :

$$a = g \sin \theta - \mu_d g \cos \theta$$

així, mesurant-hi a per a diversos angles es pot obtenir μ_c . En aquest cas cal representar $a/g \sin \theta = (a/g)(1 + \cot^2 \theta)^{1/2}$ en funció de $\cot \theta$ i ajustant-hi per mínims quadrats, el pendent és $-\mu_d$.

En moltes ocasions cal reduir la fricció perquè, per exemple, provoca desgast i escalfament de peces de mecanismes; amb aquesta finalitat s'utilitzen els lubricants, que en introduir-se entre les superfícies en contacte fan decreixer dràsticament les forces de fricció; per exemple, el coeficient de fricció entre el ferro i el bronze és de 0,25, i quan es posa un lubricant es pot reduir entre 0,05 i 0,08. En canvi, en altres casos es requereix tenir valors màxims de la fricció; és el que passa quan es vol obtenir una acceleració d'arrencada gran en un cotxe. La força que el terra fa sobre el vehicle i l'accelera és la de fricció màxima; entre el cautxú i el formigó sec el coeficient de fricció pren valors compresos entre 0,5 i 0,8, i en cotxes de competició amb les superfícies de les rodes tractades especialment s'atenyen valors de μ superiors a la unitat. Més encara, després d'unes quantes curses, el residu que les rodes deixen sobre el terra fa que la fricció es produïska entre cautxú i cautxú i que augmente el coeficient de fricció. A més, per tal d'incrementar l'acceleració es dissenya el bòlid de manera que la força normal sobre les rodes motrius prenga els màxims valors possibles, finalitat que s'aconsegueix amb una distribució adient de les masses i afegint-hi alerons que aprofiten els efectes aerodinàmics.

Tanmateix, l'anàlisi del moviment general d'una roda que descansa sobre el terra implica la introducció d'un altre concepte. Considerem que s'aplica una força \mathbf{F} a una roda que es troba sobre un pla horitzontal, i que la força és paral·lela al pla. Si només hi haguera força de fricció, amb qualsevol valor de F la roda es posaria en rotació. En canvi, el que s'observa és que per iniciar el gir cal que la força supere un cert valor que depèn de la natura de les superfícies en contacte, fet que demostra que hi ha també una fricció de rodolament. La seua causa radica en el fet que els cossos no són sòlids rígids sinó que es deformen lleugerament en la zona de contacte i la roda queda encaixada en un petit solc. L'estudi experimental del cas estableix que el moment de la força aplicada respecte del punt P de contacte ha de superar un valor mínim, M_{rm} , que és proporcional a la força normal en el contacte. És a dir,

$$M_{rm} = \rho N \quad \text{i} \quad M_p \geq M_{rm}$$

on ρ és el coeficient de rodolament, que és independent del radi de la roda i de la velocitat. Cal notar que ρ té dimensions longitud.

Vegem com serà el moviment de segons els casos que es puguin donar. Considerem que \mathbf{F} s'aplica a una distància d del punt P de contacte, on es la força de fricció \mathbf{F}_r i el moment de rodolament. Si $F > \mu N$ hi haurà lliscament

i si $M = Fd > \rho N$ rodolament. Ço és, si $\mu < \rho/d$ la roda comença lliscant, i si $\mu > \rho/d$ ho fa rodolant. El trànsit entre tots dos casos es dona per a una distància d_0 tal que $d_0 = \rho/\mu$, i es pot enunciar que, per a una força F donada, si $d < d_0$ hi ha lliscament i si $d > d_0$, rodolament. Volem ara esbrinar el tipus de moviment de la roda i considerarem per separat els dos casos esmentats:

1) $\mu < \rho/d$, o, el que és el mateix, $\rho N/d > \mu N$. Es poden donar dos subcasos: Si $\rho N/d > F > \mu N$ només llisca, mentre que si $F > \rho N/d > \mu N$ llisca i gira. En aquesta darrera situació, el sentit del gir es determina pel sentit del moment de les forces respecte del centre de masses. Prenent-hi com a positiu el sentit del moment de \mathbf{F}_r respecte del centre

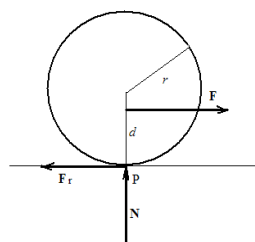


Fig. 5.2

és
de
la roda
troben

$$M = F_r r - F(r - d) = \mu N r - F(r - d)$$

cal que siga $\mu N r > F(r - d) > \rho N(r - d)/d$, atesa l'anterior desigualtat. Se'n dedueix que ha de ser $d > \rho d / (\mu r + \rho) = r d_0 / (r + d_0)$. En definitiva

$$\text{si } d > \frac{r d_0}{r + d_0} \text{ gira en sentit horari}$$

$$\text{si } d < \frac{r d_0}{r + d_0} \text{ gira en sentit antihorari}$$

2) $\mu > \rho/d$, o bé, $\mu N > \rho N/d$. També hi tenim dos subcasos: Si $\mu N > F > \rho N/d$, es té $F_r = F$ i el moment és sempre positiu; la roda gira i no llisca. Finalment, si $F > \mu N > \rho N/d$ tenim rodolament i lliscament amb un sentit de gir que obeeix les mateixes relacions donades en el cas primer.

5.2.- Viscositat.

Les molècules en els fluids estan en constant moviment, i les variacions de llurs moments lineals en els xocs que es produeixen originen la pressió al seu interior. El fluid ideal és la primera aproximació al comportament d'un fluid real, i consisteix a suposar que en qualsevol element de superfície, $d\mathbf{S}$, que es considere, la força que hi actua és proporcional a $d\mathbf{S}$ i, doncs, normal a la superfície. En un fluid real, a més de la pressió apareixen forces tangencials, de manera que la relació que hi ha entre la força $d\mathbf{F}$ i la superfície $d\mathbf{S}$ és de tipus tensorial, ço és, que es descriu mitjançant un tensor de tensions

$$\sigma_{ij} = (-p + \gamma \Omega) \delta_{ij} + 2\eta e_{ij}$$

on p és la pressió hidrostàtica, $\gamma = \lambda - 2\eta/3$, λ és el coeficient de fricció expansiva, η el de viscositat, $\Omega = \text{div} \mathbf{v}$, el coeficient de dilatació i e_{ij} el canvi temporal del tensor de deformacions

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

on v_i són els components de la velocitat. Els coeficients λ i η depenen de la temperatura.

El tensor de tensions es pot escriure $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + v_{ij}$ amb

$$v_{ij} = \gamma \Omega \delta_{ij} + 2\eta e_{ij}$$

i, si el fluid és incompressible ($\Omega=0$), es té

$$v_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Per centrar les idees suposarem el moviment més senzill d'un fluid incompressible, aquell en què totes les partícules es mouen en el sentit de l'eix x i que, a causa de la fricció, les làmines veïnes porten velocitats lleugerament diferents, és a dir, que la velocitat només té un component $v = v_x(y)$ i el tensor v_{ij} dos components no nuls

$$v_{12} = v_{21} = \eta \frac{\partial v}{\partial y}$$

Aquesta descripció correspon, per exemple, a la distribució de velocitats d'un líquid que flueix entre dos plans separats per una altura h , el del fons en repòs i el de dalt que es mou amb una velocitat v_0 ; cada capa horitzontal tira la immediatament inferior i és frenada per ella mentre que és arrossegada per la superior, de manera que s'estableix un gradient vertical de velocitats (constant, tal com veurem tot seguit): la capa que està en contacte amb el terra té, com aquest, velocitat zero i, a partir d'aquí, la velocitat creix linealment fins a la superfície lliure. La força de fricció, ara denominada de viscositat, que sobre un element de superfície dS_y , fa la capa veïna és

$$d\mathbf{F} = (v) \cdot d\mathbf{S} ; dF_x = v_{12} dS_y = \eta \frac{\partial v}{\partial y} dS_y$$

i l'equació del moviment d'un element de volum que es mou amb velocitat independent del temps s'escriu

$$\eta \frac{dv}{dy} = \text{const} = \eta \frac{v_0}{h}; \quad v(y) = \frac{v_0 y}{h}$$

que satisfà la condició de ser zero en el fons i v_0 en el pla superior.

Una mica més complicat és el cas d'un fluid incompressible que circula laminarment per un tub cilíndric, perquè s'ha de plantejar en coordenades cilíndriques. De tota manera, s'entén que ara la velocitat, que sols depèn de la coordenada radial, ha de ser zero vora el tub i màxima en el seu eix. Concretament, si entre el extrems d'un tub de longitud l i radi a es

manté una diferència de pressió $\Delta p = p_1 - p_2$, la velocitat és

$$v(r) = \frac{\pi \Delta p}{4\eta l} (a^2 - r^2)$$

i el cabal

$$\frac{V}{t} = \int_0^a v 2\pi r dr = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8\eta l}$$

En particular, si el tub és vertical i la diferència de pressió la provoca la gravetat

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi a^4 \rho g h}{8\eta l}$$

Aquesta relació és el fonament de les mesures de viscositat amb el **viscosímetre d'Ostwald** (fig. 5.3). Es cronometra el temps t que triga a recórrer una altura h un volum conegut, V . Tal com hem vist, $t = k\eta/\rho$ i les mesures es fan per comparació amb l'aigua, per a la qual es té la mateixa relació Fig. 5.3 $t_a = k\eta/\rho_a$ i

$$\frac{t}{t_a} = \frac{\eta \rho_a}{\eta_a \rho}$$

Un altre model de viscosímetre consta de dos cilindres metàl·lics de longitud l i radis a i b , entre els qual es col·loca el fluid (Fig. 5.4); quan es fan girar amb velocitats angulars ω_a i ω_b , el líquid es posa en rotació perquè, a causa de la viscositat, cada capa cilíndrica exerceix sobre la veïna un moment M independent de r , ja que així el moment resultant sobre les dues cares de la capa s'anul·la, tal com correspon a un estat estacionari. Aquest moment és el que actua sobre la superfície interior del cilindre de radi b i equival a

$$M = \frac{4\pi \eta l a^2 b^2}{b^2 - a^2} (\omega_b - \omega_a)$$

El procediment consisteix a mantenir en repòs el cilindre exterior, per a la qual cosa hi cal aplicar un moment $M(\omega_b = 0)$ amb una balança de torsió que el mesura. Llavors,

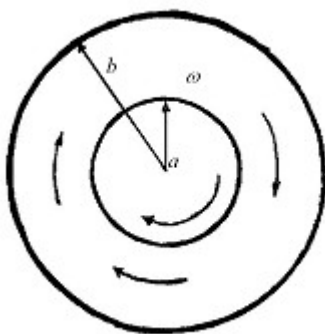
$$\eta = \frac{(b^2 - a^2)M}{4\pi l a^2 b^2 \omega_a}$$

La viscositat de la sang és un paràmetre que utilitzen els metges perquè proporciona informació sobre

algunes malalties. Com que no es pot usar el viscosímetre

Fig. 5.4

d'Ostwald perquè la sang es coagularia, Hess va idear un instrument diferent que compara la viscositat de la sang amb la de l'aigua i l'expressa en unes unitats pràctiques.



TEMA 6

MESURA DE FORCES, PRESSIONS I FLUXOS

6.1.- Dinamòmetre. Transductors piezoelèctrics.

La força que un cos exerceix sobre un altre es pot mesurar de diverses maneres, com ara comparant-la amb un pes conegut en una balança de braços desiguals; a partir del seu moment mitjançant una balança de torsió, i mesurant-hi algun dels seus efectes que li són proporcionals. Quan l'efecte és la deformació, Δx , d'una molla, que segons la llei de Hook, $F = k \Delta x$, on k és la constant de la molla, és proporcional a la força aplicada, l'aparell s'anomena **dinamòmetre** (fig. 6.1). Consisteix en una molla que s'estira en aplicar-li la força i disposa d'un cursor que indica directament el valor de la força. Els **transductors piezoelèctrics** tenen com a element essencial un cristall d'un material que té la propietat que quan actua sobre ell una tensió, de tracció o de compressió, es deforma de tal manera que apareix un camp elèctric intern E en un sentit o en el contrari; la causa n'és que la distribució asimètrica dels ions en el cristall és tal que, mentre que en absència de tensió els centres de les càrregues positives i negatives coincideixen, en deformar-se, aquests centres es desplacen relativament i això origina un camp elèctric entre les cares sobre les quals es fa la pressió, que és proporcional a aquesta; si les cares estan separades per una distància d , es forma una diferència de potencial $V = Ed$

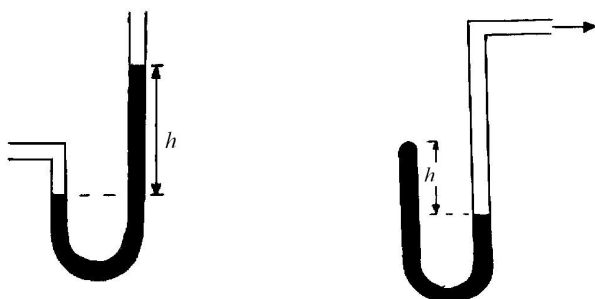


Fig. 6.1 que es recull en un voltímetre, l'escala del qual ja és graduada en unitats de força o de pressió, segons convinga. L'efecte piezoelèctric és reversible, de manera que si s'aplica una tensió elèctrica V al cristall s'origina una tensió mecànica que el deforma; si V és harmònica en el temps i de freqüència ω , el cristall executa oscil·lacions forçades, l'amplitud de les quals és màxima quan ω coincideix amb la freqüència pròpia del cristall, en un fenomen típic de ressonància. Aquest fet s'aprofita per a construir generadors d'ultrasons amb cristalls piezoelèctrics. El primer material piezoelèctric que es va usar és el quars, però té l'inconvenient de donar una resposta molt feble. Altres substàncies que gaudeixen d'aquesta propietat són el fosfat àcid d'amoni i el tartrat de sodi i potassi, que són solubles en aigua i tenen poca resistència mecànica. Actualment els materials piezoelèctrics més usats són òxids ceràmics, en particular, titanat de bari i titanat-zirconat de plom. Un òxid ceràmic és format per una multitud de petits cristalls que tenen els seus eixos orientats aleatòriament i, doncs, sense efecte piezoelèctric macroscòpic. Cal orientar els cristalls en qüestió aplicant-hi una tensió d'uns 10 kV, de vegades en calent i després refredar-los tot mantenint la tensió. Com els materials ferroelèctrics, cada piezoelèctric té una temperatura de Curie, per damunt de la qual perd aquesta propietat; si ocorre això se'n pot recuperar el caràcter aplicant-hi de nou la tensió elèctrica.

6.2.- Manòmetres.

Per mesurar la pressió en un fluid s'empren els manòmetres, dels quals hi ha diversos tipus d'acord amb l'interval de valors de la pressió que cal avaluar. El més senzill és el **manòmetre d'aire lliure** (fig. 6.2 a), que serveix per a mesurar pressions superiors a l'atmosfèrica. Consisteix en un tub en U, de branques obertes, que conté mercuri. Si els dos extrems es troben a la pressió atmosfèrica, p_0 , el nivell del mercuri en ambdues branques és el mateix; en canvi, si un extrem s'introdueix en el recipient que conté el gas a una pressió $p > p_0$, el mercuri es desnivella i l'altura h entre els dos nivells dona

la diferència de pressions:



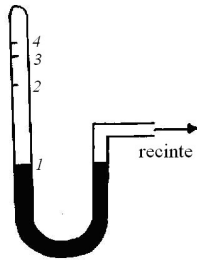


Fig. 6.2 (a)

(b)

(c)

$$p - p_0 = \rho gh$$

on ρ és la densitat del mercuri. Semblant a aquest és el **manòmetre truncat** (Fig. 6.2 b), que té una branca de la U tancada i l'oberta es connecta al dipòsit amb gas. Primer s'ompli de mercuri de manera que el desnivell entre l'extrem tancat i el lliure siga h ; després es posa en contacte amb el gas a la pressió p que es vol determinar i que ha de ser menor que ρgh ; el nou desnivell ens dona la pressió cercada. També el **manòmetre d'aire comprimit** consta d'un tub en U amb un extrem tancat (fig. 6.2 c), però es basa en la llei de Boyle-Mariotte: $pV = \text{constant}$ quan la temperatura és constant. La branca tancada de la U conté aire i en el tub es fica mercuri, que arribarà al mateix nivell en totes dues branques. Quan l'extrem obert es connecta a la pressió incògnita, elevada, fa pujar el mercuri i comprimir l'aire de la branca tancada; sobre aquesta hi ha ja marcada una escala de proporcionalitat inversa que indica directament la pressió.

Els **manòmetres metàl·lics** s'empren per determinar pressions en la indústria i també l'atmosfèrica, i en aquest darrer cas reben el nom de **baròmetres**. Es basen en la deformació que experimenta una làmina metàl·lica elàstica quan entre les seues dues superfícies hi ha una diferència de pressió. Un sistema mecànic transforma la deformació en el moviment d'una agulla que assenjala sobre una escala el valor de la pressió. Si una cara és la interior en un dipòsit on hi ha el buit i l'exterior està en contacte amb l'atmosfera, l'aparell mesura la pressió atmosfèrica. Si el dipòsit és a la pressió atmosfèrica i la cara exterior a una pressió major que l'atmosfèrica, la indicació dona la diferència de pressions. De manera semblant funcionen els manòmetres mèdics.

Els **manòmetres d'èmbol** donen el valor de la pressió mesurant la força que actua sobre una superfície coneguda i, com ja s'ha indicat, això es pot fer amb un transductor piezoelèctric.

Les determinacions acurades de pressions molt baixes es fan amb els **vacuòmetres**. Els d'aire comprimit (fig. 6.3) actuen com ja s'ha explicat però estableixen la comparació de les pressions, p , incògnita i $p + \rho gh$, amb h molt petit, amb la inversa dels volums, un de gran, V , i un altre de petit, v , que correspon a un capil·lar. El líquid de la columna és, com és habitual, mercuri i, llavors, si la pressió es mesura en mil·límetres de mercuri, es té:

$$\frac{V}{v} = \frac{p + h}{p} = 1 + \frac{h}{p} \cong \frac{h}{p}$$

i, doncs, $p = \frac{v}{V} h$ en mil·límetres de mercuri.

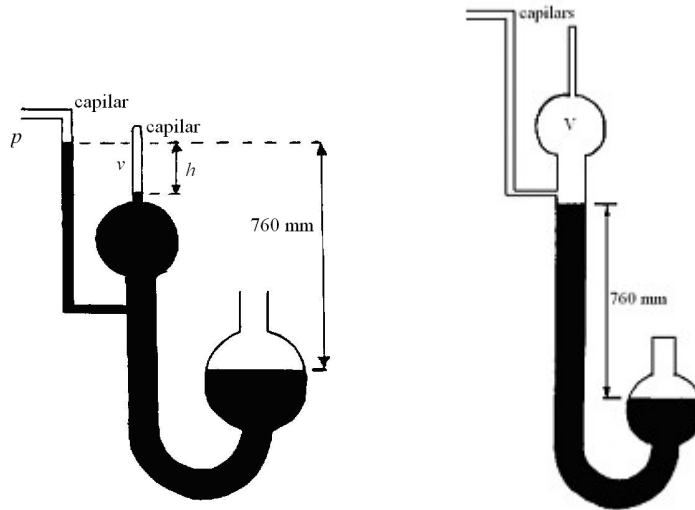


Fig. 6.3

Actualment s'utilitzen vacuòmetres de precisió que estan basats en les variacions de determinades magnituds físiques que depenen de la pressió: resistència elèctrica, descàrrega luminiscent, ionització, etc.

6.3.- Mesura de fluxos.

El cabal d'un fluid que circula per un tub, entès com el volum que hi passa per unitat de temps, és simplement el producte Sv de la secció del tub per la velocitat del fluid, considerada constant en tota la secció. Si es coneix la densitat del fluid se'n pot donar el cabal, multiplicant-la per aquesta, en unitats de massa per unitat de temps. El fonament d'aquestes mesures és considerar el fluid com a ideal, és a dir, de viscositat negligible i incompressible, i aplicar-hi el teorema de Bernoulli, que estableix que entre dos punts, 1 i 2, d'un tub de corrent es compleix que

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

i no és sinó l'expressió de la conservació de l'energia. Si el tub és horitzontal, es redueix a

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

expressió que ens informa que on més gran és la velocitat menor és la pressió (**efecte Venturi**).

A més, pel fet de ser incompressible, la conservació de la massa s'escriu, $S_1 v_1 = S_2 v_2$. Així es té

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho S_1^2 v_1^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)$$

i es pot aïllar el cabal:

$$S_1 v_1 = \sqrt{\frac{2 S_1^2 S_2^2 \Delta p}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}} \sim \sqrt{\Delta p}$$

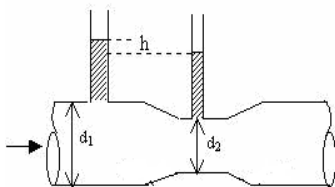
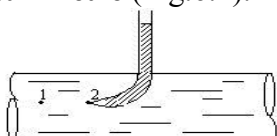


Fig. 6.4

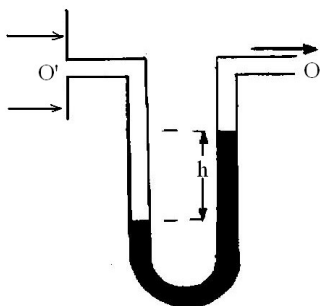
Cal posar doncs, en el tub un estretament i mesurar la diferència de pressions entre aquest i un punt del tub per tal d'obtenir el cabal si es coneix la densitat; l'aparell s'anomena **venturímetre** (Fig.6.4).



Les mateixes idees s'apliquen en els **tubs de Pitot** (Fig.6.5) per a líquids i per a gasos. El primer serveix per a determinar la velocitat d'un líquid en una conducció

oberta, com ara un canal, i consisteix només en un tub en L obert pels dos extrems; es col·loca la branca horitzontal de cara al corrent i es mesura l'altura a què arriba el líquid en la vertical. Com que en aquesta el fluid és en repòs, es té

$$\rho gh = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \text{i} \quad v = \sqrt{2gh}$$

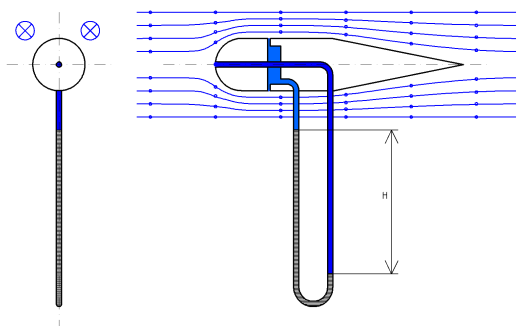


$$p_o - p_{o'} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

que no és sinó $\rho_0 gh$ (ρ_0 és la densitat del mercuri), ens proporciona la velocitat

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_0 gh}{\rho}}$$

Una variant millorada d'aquest instrument és el **tub de Prandtl** (Fig. 6.7), en el qual la branca posterior de la U es tanca sobre l'anterior i disposa de dos orificis sobre els quals el gas té la velocitat que es vol determinar mentre que en la boca el fluid és en repòs. Així, la velocitat és donada per la mateixa expressió anterior.



6.4.- Forces d'un fluid sobre un sòlid.

Si, com a aproximació d'ordre zero,

Fig. 6.7

considerem que el fluid és ideal, arribarem a la conclusió que no pot interaccionar amb el sòlid i, en conseqüència, que no fa cap força sobre ell, resultat que contradiu l'experiència corrent. Així doncs, per explicar les forces que un fluid exerceix sobre un sòlid cal considerar la viscositat. En general, el moviment d'un fluid real al voltant d'un sòlid que s'introdueix al seu interior planteja un problema matemàtic molt complex d'equacions en derivades parcials amb condicions de contorn (component de la velocitat normal a la superfície nul·la) que només admeten solucions analítiques en geometries molt senzilles. Independentment que se'n conega la solució exacta o no, el fet és que sobre el cos sòlid actua una força que depèn de la velocitat del fluid; que aquesta siga petita o gran depèn del líquid i de l'obstacle, i la diferència queda establerta pel nombre de Reynolds, que és adimensional, corresponent a cada cas. Si, amb aquest criteri, la velocitat és petita, el règim de flux s'anomena de Poiseuille, i si és gran s'anomena règim de Venturi, que es diferencia de l'anterior per la formació de remolins. Atès que l'obtenció teòrica de la força que el fluid fa sobre el sòlid és, en general, pràcticament impossible s'ha optat per introduir-hi experimentalment un **coeficient de forma** definit per la relació entre aquesta força i la que el fluid exerceix sobre un sòlid patró que tinga la mateixa secció frontal respecte del corrent. Si aquest coeficient és major que la unitat, l'obstacle oposa més resistència que el cos patró a l'avanç del fluid; en canvi, els perfils més aerodinàmics proporcionen coeficients molt menors que 1.

Les equacions de la hidrodinàmica es poden resoldre exactament per a alguns obstacles, com ara el cilindre i l'esfera. Concretament, la força sobre una petita esfera de radi r al si d'un fluid amb coeficient de viscositat η que es mou en règim laminar la dona la fórmula de Stokes

$$F = 6\pi r \eta v$$

Com que aquesta força és proporcional a la velocitat, el moviment de caiguda vertical d'una gota esfèrica és tal que s'arriba a una velocitat límit v_L , que val

$$v_L = \frac{2r^2(\rho - \rho_a)g}{9\eta}$$

on ρ_a és la densitat de l'aire, que s'introdueix en considerar l'empenyiment aerostàtic. La mesura de la velocitat límit permet determinar viscositats pel mètode de Stokes, si es coneixen el radi i la densitat de les gotes o, inversament, saber quina és la densitat i la viscositat serveix per avaluar-ne el radi. Aquest procediment el va emprar Millikan per conèixer el radi de les gotetes d'oli carregades elèctricament i després la seua càrrega; així va fer la primera determinació directa de la càrrega electrònica.

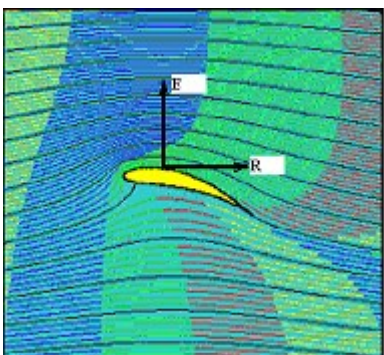
En règim de Venturi el valor aproximat de la força sobre un sòlid de coeficient de forma k el dóna la fórmula de Newton

$$F = \frac{1}{2}k\rho Sv^2$$

on ρ és la densitat, S la secció frontal i v la velocitat del fluid.

Considerem ara com a exemple que el sòlid és un cilindre i que està animat d'un moviment de rotació al voltant del seu eix dins d'un fluid que, lluny del sòlid, flueix uniformement. Ara, en la zona on el sentit de les velocitats del fluid i del sòlid coincideixen, la del fluid serà major que en la zona oposada, i es pot entendre que això done lloc a una diferència de pressió que origina una força transversal sobre el cilindre, fet que es coneix com **efecte Magnus**. Aquesta força la van avaluar teòricament Kutta i Yukovski i equival a

$$F = \rho v l C$$



on ρ és la densitat, v la velocitat del fluid lluny del sòlid, l la longitud del cilindre i C la circulació de la velocitat al voltant d'aquest

$$C = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

Aquest efecte dóna una interpretació intuïtiva de la força que actua sobre un sòlid no simètric que es mou relativament respecte d'un fluid de manera que es formen al seu voltant remolins, com ara l'ala d'un avió (fig. 6.8). Dependent de l'angle que forma l'ala amb la velocitat (angle d'atac) es crea una força

Fig. 6.8

d'empenyiment aerodinàmic, \mathbf{F} , que es pot descompondre en dos components, un de paral·lel a la velocitat, \mathbf{R} , suposem que siga horitzontal, que és la resistència a l'avanç, i l'altre, \mathbf{E} , vertical, que és la força de sustentació. Aquestes forces, sobre models a escala, es mesuren amb dinamòmetres en túnels aerodinàmics i se solen representar en un diagrama polar on a cada angle d'atac li correspon un punt en el pla amb el valor de R com a abscissa i el de S com a ordenada. Aquests diagrames serveixen per triar la forma de l'ala i l'angle d'atac més convenient al tipus d'avió que es vulga dissenyar.

TEMA 7

MESURA DE MAGNITUDS ELÀSTIQUES

7.1.- Tensions i deformacions.

La primera aproximació a l'estudi del comportament d'un sòlid sotmès a un sistema de forces consisteix a considerar-lo com un cos rígid. En realitat, tots els sòlids que suporten tensions sofreixen deformacions que depenen de la intensitat de les forces aplicades i, per analitzar-les, es considera que el sòlid es troba en equilibri, és a dir, que la resultant i el moment resultant són nuls; hi poden haver casos de cossos en moviment, per exemple, una vareta en rotació, que es poden tractar com si estiguessen en equilibri sota les forces reals i les d'inèrcia. Si aïllem mentalment una porció del sòlid, les forces que actuen sobre ella són de dos tipus: forces en volum produïdes per camps externs, com ara el pes, i forces originades per les interaccions entre molècules veïnes que, com que són de curt abast, es poden considerar superficials. Mentre que les primeres es caracteritzen per una densitat volumètrica, ço és, $d\mathbf{F}_v = \mathbf{f}dv$, i \mathbf{f} és una dada del problema, les segones queden definides per la força per unitat de superfície o tensió i poden ser dades, si són condicions de contorn externes, o internes, que són les incògnites. Ara bé, com que la superfície és un vector $d\mathbf{S}$ normal a ella i la força $d\mathbf{F}_s$ en general no ho serà, la relació entre ambdues queda definida per una magnitud tensorial que s'anomena tensor de tensions, σ , amb elements σ_{ij} , i s'escriu $d\mathbf{F}_s = \sigma \cdot d\mathbf{S}$. Els elements de la diagonal principal de σ defineixen les tensions normals i els no diagonals les tensions tangencials.

L'efecte que les tensions provoquen en el sòlid són deformacions que, mentre que les primeres no superen uns límits que depenen del medi, guarden una relació de proporcionalitat, i en llevar les forces aplicades el sòlid recupera les seues dimensions inicials. Si les tensions arriben a ser més intenses, la relació entre tensions i deformacions deixa de ser de proporcionalitat però també, en llevar aquelles, es recupera la forma original i diem que encara som en el règim elàstic. Superat aquest límit, la deformació en comptes d'elàstica és plàstica, i el cos no recupera la seua forma quan se suprimeixen les tensions; en anar minvant les forces i arribar a anul·lar-les, queda una deformació romanent i cal aplicar-hi forces de sentit contrari per aconseguir que el cos assolisca les dimensions inicials. Si continua el procés de fer créixer les forces en sentit contrari i tornar a invertir-les, la representació de les deformacions en funció de les tensions tanca un cicle d'histeresi. Ens ocuparem només de sòlids elàstics, per als quals les deformacions es caracteritzen per una magnitud denominada tensor de deformacions, e , amb elements

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right)$$

on el vector $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ és el desplaçament del punt \mathbf{r} del sòlid causat per les forces. Els components de la diagonal principal representen deformacions longitudinals relatives i els no diagonals deformacions angulars. Així, per exemple,

$$e_{11} = \frac{\Delta dx_1}{dx_1}, \quad e_{12} = \frac{\theta_{12}}{2}$$

on θ_{12} és la diferència entre $\pi/2$, angle inicial, abans de la deformació, i l'angle que formen uns eixos locals lligats al medi, x_1 i x_2 , després de la deformació.

Tal com ja s'ha dit, la relació entre e i σ és de tipus lineal i es defineix mitjançant unes constants elàstiques que, si el sòlid és isòtrop, es redueixen a dues, que definirem a continuació.

7.2.- Mòdul de Young i coeficient de Poisson.

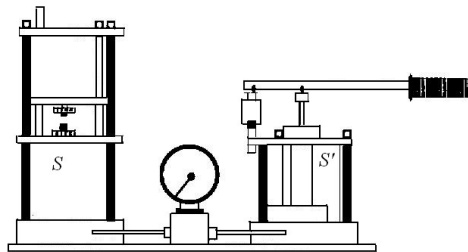
Considerem un experiment de tracció simple, com ara una vareta de longitud l i secció S que se sotmet a forces $\pm F$ en la seua direcció, és a dir, a una tensió uniforme $\sigma_{11} = \sigma = F/S$. Les deformacions que s'hi observen són de dos tipus: un increment de la longitud (negatiu si la tensió és de compressió) Δl i un decreixement (creixement en cas de compressió) de les

dimensions transversals, per exemple Δy , respecte del valor inicial, y . Les relacions de proporcionalitat respectives s'escriuen

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \sigma \quad \frac{\Delta y}{y} = -\frac{\nu}{E} \sigma$$

on E és el **mòdul de Young** i ν el **coeficient de Poisson** del material.

Per determinar experimentalment aquests coeficients cal prendre diverses mostres cilíndriques

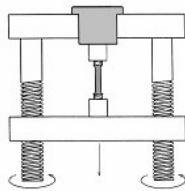


del material i sotmetre-les a una compressió amb una premsa hidràulica (fig.7.1), màquina que consta de dos tubs de seccions S i $S' < S$, amb els seus èmbols, que estan comunicats i pels quals pot fluir un tipus d'oli que fa de transmissor de pressió. Quan s'aplica una força F' en l'èmbol de secció S' apareix en l'altre una força $F = SF'/S'$ que és molt més gran que F' . A més, disposa d'un manòmetre amb el

Fig. 7.1 qual es mesura la

força F i una vareta que transmet, mitjançant un sensible sistema mecànic, el petit desplaçament de l'èmbol gran a un indicador. La mostra es fica entre aquest èmbol i un suport

rígid, es fa actuar la premsa i es llegeixen els valors de F i de Δl . L'altra alternativa és sotmetre la mostra a una força de tracció (fig. 7.2).



Quan les tensions aplicades tenen una distribució geomètrica diferent les deformacions també canvien, lògicament, i es poden definir altres paràmetres elàstics que relacionen la causa amb l'efecte, però sempre es poden expressar en termes de E i ν . Per exemple, si es considera una barra prismàtica de

Fig. 7.2

costats a , b i c , sotmesa a tensions σ_{11} , σ_{22} i σ_{33} , el principi

de superposició, vàlid perquè es tracta de relacions lineals, ens assegura que la deformació d'un costat és

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33})$$

i expressions anàlogues per a les variacions dels altres costats. En particular, si les tensions són iguals i de compressió (compressió isòtropa) es té

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p \quad \text{i} \quad \sigma_{ij} = 0$$

i la variació relativa del volum de la barra és

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} = -\frac{3(1-2\nu)}{E} p \equiv -\frac{1}{k} p$$

on k és el **mòdul de compressibilitat** del material, que és determinat per E i ν .

Un altre cas interessant és el que correspon a una distribució de tensions exclusivament tangencials en quatre de les cares d'un prisma com l'anterior però que ara, per simplificar, suposarem que són de secció quadrada; les tensions $\pm\sigma$ actuen sobre les cares normals en aquesta secció i fan que es transforme en un rombe, de manera que els angles rectes originals ara són de $\pi/2 - \theta$. Es pot demostrar fàcilment que l'angle θ , que s'introdueix com a mesura de la deformació, equival a

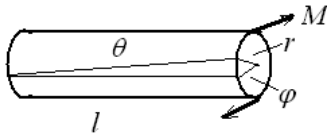
$$\theta = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma \equiv \frac{1}{\mu} \sigma$$

on el paràmetre μ és el **mòdul de rigidesa** del material. Llavors es diu que el sòlid és sotmès a un estat de cisalla pura, que s'aconsegueix en el laboratori amb les proves de torsió: es col·loca una vareta cilíndrica rígidament subjecta pels extrems, el de dalt fix i el de sota en el centre d'un disc graduat al qual s'aplica tangencialment la força mitjançant un dinamòmetre; aquest mesura la força, que multiplicada pel radi del disc dona el moment M , i el disc indica

l'angle de torsió. Si en comptes d'una vareta fóra un tub de longitud l , radi r i gruix Δr , el moment valdria, en lloc de M ,

$$\Delta M = 2\pi r^2 \Delta r \sigma$$

Atès que cada element del tub està en estat de cisalla pura, la deformació angular, θ , i l'angle φ girat per la base estan relacionats per (fig. 7.3) $l\theta = r\varphi$ i, a més, $\sigma = \mu\theta$, de manera que



$$\Delta M = \frac{2\pi\mu r^3 \Delta r}{l} \varphi$$

Fig. 7.3

Aquest resultat permet, per integració, d'obtenir el moment corresponent a una vareta de radi R :

$$M = \frac{2\pi\mu\varphi}{l} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\mu R^4}{2l} \varphi$$

resultat que serveix per a mesurar μ i és el fonament de les balances de torsió. Com que l'aparell descrit permet d'aplicar moments prou grans, que superen el límit elàstic de la vareta, es pot usar per dibuixar el seu cicle d'histeresi.

7.3.- Duresa de Brinell.

Es diu que un material és més dur que un altre quan el pot ratllar si hom l'arrossega per sobre. Aquesta definició qualitativa permet les comparacions però no permet d'assignar-hi valors a la duresa. Per superar aquest inconvenient, Brinell va definir un paràmetre, la duresa de Brinell, representada per HB , i el procediment experimental per determinar-lo. Essencialment, es tracta de mesurar el diàmetre, d , del senyal que deixa sobre una superfície plana del material una boleta de prova de diàmetre D (boleta de Brinell) quan es prem amb una força F . La duresa s'avalua amb la fórmula

$$HB = 0,102 \frac{2F}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})}$$

en la qual F va en newtons i els diàmetres en mil·límetres. Hom disposa d'una gamma de boletes de diversos diàmetres per tal d'utilitzar la més convenient segons el material de què es tracte. El criteri de bondat de l'elecció és que $0,2D < d < 0,7D$.

TEMA 8

MESURA DE MAGNITUDS DE LES ONES

8.1.- Conceptes generals.

En la natura es presenten molt sovint magnituds físiques, les variacions o perturbacions de les quals tenen la propietat de propagar-se en l'espai. Aquestes magnituds poden ser escalars (pressió, densitat...), vectorials (desplaçament, camps de força...) o tensorials, i llurs perturbacions les representarem per una funció d'ona $\psi(\mathbf{r}, t)$. Perquè el fenomen propagatiu es pugui qualificar d'ona cal que ψ satisfaci l'equació d'ones

$$\Delta \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

on, atenent a la forma de les solucions, que es veurà a continuació, v representa la velocitat de propagació de l'ona. Estrictament, aquesta és l'equació d'ones ideal que correspon a casos on es poden negligir els efectes dissipatius d'energia, com ara la fricció. Quan aquests es prenen en consideració, la funció d'ones ha de satisfer l'equació d'ones general

$$\Delta \psi - \gamma \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

en la qual, el terme dissipatiu és el proporcional a la derivada temporal primera. La dependència temporal se sol expressar en termes de funcions harmòniques del tipus $\exp(\pm i\omega t)$, per a les quals l'equació d'ones ideal es redueix a la de Helmholtz, anomenada també d'ones estacionàries

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0$$

en la qual s'ha posat $k = \omega/v$. L'equació d'ones general adopta la mateixa forma però amb k complex

$$k = \frac{\omega}{v} \sqrt{\left(1 + \frac{\gamma v^2}{\omega} i\right)} \equiv \beta + \frac{\alpha}{2} i$$

Quan la perturbació depèn només d'una coordenada cartesiana, z , la solució general és del tipus

$$\psi(z, t) = f(z - vt) + g(z + vt)$$

que correspon a una ona que avança segons l'eix z amb una velocitat v i una altra que ho fa en sentit contrari. Si agafem, per exemple, la primera, veiem que el seu valor roman constant sobre plans d'equació $z = z_0 + vt$ que es mouen amb la velocitat v , que es coneix com a **velocitat de fase**. Llavors parlem d'ones planes que, quan la dependència temporal és harmònica, es representen per les funcions

$$\psi(z, t) \approx e^{i(kz \pm \omega t)}$$

Si es fa una rotació d'eixos de manera que la direcció de propagació siga \mathbf{u} , l'expressió anterior adopta la forma

$$\psi(z, t) \approx e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)} = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)}$$

i $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$ rep el nom de vector d'ona. Aquestes funcions tenen una doble periodicitat, una de temporal amb **període** T , tal que $\omega = 2\pi/T$ i una altra d'espacial amb període λ , anomenat **longitud d'ona**, tal que $k = 2\pi/\lambda$, que verifiquen la relació $v = \lambda/T$.

Segons quin siga el fenomen ondulatori que es considere les equacions de partida prendran formes diferents, i l'únic paràmetre que apareix en l'equació d'ones, la velocitat de fase, tindrà valors diferents. Si es tracta d'un fil de densitat μ per unitat de longitud sotmès a una

tensió T , la velocitat és $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, si es fa vibrar longitudinalment una vareta sòlida de

densitat ρ i mòdul de Young E , la velocitat val $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ i, finalment, si es tracta del so que

es propaga per un gas $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, on γ és el coeficient adiabàtic, R la constant del gasos perfectes, T la temperatura i M la massa molar.

Les geometries de l'emissor i de les superfícies que separen medis diferents poden donar lloc a fenòmens ondulatoris molt complicats. Les solucions de l'equació d'ones són bastant senzilles quan les condicions permeten plantejaments en coordenades cilíndriques o esfèriques. En aquest darrer cas, la solució per a l'ona harmònica que se'n va és, amb la pertinent elecció de l'origen de temps,

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t)$$

Com que cada punt del medi es mou harmònicament, la seua energia serà la mateixa que la d'un oscil·lador, que és proporcional al quadrat de l'amplitud. L'ona transporta energia, i la magnitud que ho representa és la **intensitat** de l'ona, que es defineix com el flux de potència per unitat de superfície normal a la direcció de propagació.

En el cas concret d'ones sonores la sensació que produeixen en l'orella és funció de la intensitat i de la freqüència. L'orella normal és sensible a freqüències compreses entre 0 i 20 kHz. Per a cada freqüència hi ha una intensitat mínima o llindar per sota la qual no hi ha sensació i una de màxima que marca el límit de dolor. Entre aquests extrems la sensació depèn de la intensitat però no linealment sinó de manera aproximadament logarítmica. Per tal motiu, es determina la diferència entre dues sensacions sonores com

$$S - S_0 = \log \frac{I}{I_0}$$

i es mesura en bels. Normalment es pren I_0 com la intensitat llindar ($S_0=0$), que val 10^{-12} Wm^{-2} , i com a unitat el decibel. Així, la sensació la dona

$$S = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ db}$$

Aquestes definicions s'apliquen no sols al so, sinó en general per comparar intensitats i potències diverses.

Quan es tracta d'ones harmòniques, en comptes de la intensitat instantània es treballa amb el seu valor mitjà temporal. Per a una ona harmònica plana, com que l'amplitud és independent de la posició, la intensitat també ho serà. En el cas de les ones esfèriques, atès que l'amplitud minva amb la distància recorreguda, la intensitat decreix amb el quadrat d'aquesta,

$$I(r) = \frac{a^2 I(a)}{r^2}$$

cosa que és coherent amb el principi de conservació de l'energia.

Quan hi ha processos dissipatius el medi absorbeix una part de l'energia de l'ona, fet que descriu la part imaginària del vector d'ones. En efecte, les solucions són de tipus

$$\psi(z, t) = A e^{-\alpha z/2} e^{i(\beta z \pm \omega t)}$$

i representen ones amb una amplitud que minva exponencialment a mesura que avancen. Llavors la intensitat de l'ona, proporcional al quadrat de l'amplitud, decreix segons la llei

$$I(z) = I(0) e^{-\alpha z}$$

i el paràmetre α rep el nom de **coeficient d'absorció** del medi.

8.2.- Superposició d'ones.

Considerem que la pertorbació és originada per dos focus harmònics de la mateixa freqüència. El caràcter lineal de l'equació d'ones ens assegura que la pertorbació que experimenta un punt del medi en cada instant serà la suma de les corresponents de cada focus per separat, és a dir, serà la superposició de dos moviments harmònics, que depèn de la diferència de fase entre tots dos. Si escrivim per a cada ona

$$\psi_1 = A_1 \cos(kr_1 - \omega t); \quad \psi_2 = A_2 \cos(kr_2 - \omega t + \varphi)$$

on φ és la diferència de fase entre els focus. La superposició de les dues pertorbacions depèn de la diferència de fase, δ , en el punt d'arribada

$$\delta = k(r_2 - r_1) + \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) + \varphi$$

El moviment resultant es pot obtenir analíticament o geomètricament, representant cada funció per un vector amb el mòdul i l'argument corresponent. Així s'obté

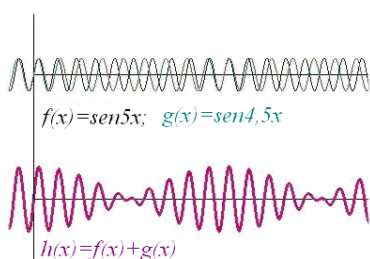
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta}$$

i s'observa que $|A_2 - A_1| \leq A \leq A_2 + A_1$, on el valor mínim (interferència destructiva) correspon a $\delta = \pi, 3\pi, \dots$ i el màxim (interferència constructiva) a $\delta = 0, 2\pi, \dots$. En particular, quan tots dos focus estan en fase ($\varphi = 0$) es té

interferència constructiva si $\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 2n\pi \rightarrow r_2 - r_1 = n\lambda$

interferència destructiva si $\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 2(n+1)\pi \rightarrow r_2 - r_1 = 2(n+1)\frac{\lambda}{2}$

Cal notar que la intensitat resultant és proporcional a $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta$, consta de la suma de les intensitats de cada ona més un terme d'interferència, que és el responsable que hi haja màxims i mínims. Si es fa variar el desfasament entre els dos focus, la intensitat resultant anirà variant al mateix ritme. Concretament, si les dues ones tenen freqüències lleugerament diferents, ω_1 i $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$, es tindrà



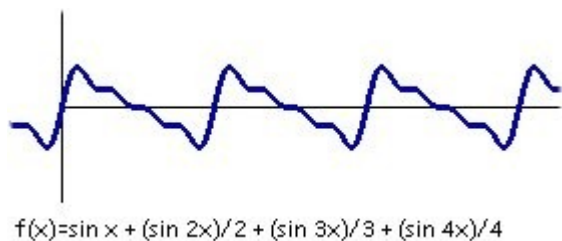
$$\cos(\omega_2 t) = \cos(\omega_1 t + \Delta\omega t)$$

i es podran aplicar les consideracions anteriors fent-hi $\varphi = \Delta\omega t$. La amplitud en un punt ja no és constant en el temps i la intensitat pren la forma

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[k(r_2 - r_1) + \Delta\omega t]$$

ço és, oscil·la amb una freqüència $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Si es tracta d'ones sonores, a l'orella es noten pulsacions d'aquesta freqüència (Fig. 8.1).

En general, les característiques del medi són funcions de la freqüència i, per consegüent, la velocitat de fase també en dependrà, de manera que si hi ha una superposició d'ones de diverses freqüències, cada component es mourà amb la seua velocitat. Aquest fet rep el nom de **dispersió**.



estableix que f es pot Fig. 8.2
harmònica

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega t)$$

on $\omega = 2\pi/T$, i els coeficients A_n i B_n són les amplituds dels components harmònics. La fig. 8.2 n'és un senzill exemple, on $B_n = 1/n$, $n=1,2,3$ i $A_n=0$. Si f no és periòdica les freqüències dels components poden prendre qualsevol valor real i f ve donada per una integral de Fourier

$$f(t) = \int A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Tant en un cas com en l'altre, les ones planes corresponents a la funció $f(t)$ són una superposició d'ones harmòniques, com ara

L'interès de les ones harmòniques rau en el fet que qualsevol tipus d'ona es pot representar com una superposició lineal d'elles. En efecte, si la dependència temporal, $f(t)$, és periòdica amb període T , el teorema de Fourier expressar com una sèrie

$$\psi(x, t) = \int A(\omega) e^{i[k(\omega)x - \omega t]} d\omega$$

També es pot prendre, però, $k = \omega/v(\omega)$ com a variable independent i escriure

$$\psi(x, t) = \int A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk$$

Si l'amplitud $A(k)$ té valors diferents de zero en un entorn de k_0 , diem que la integral representa un paquet d'ones de freqüència $\omega(k_0)$. Si es desenvolupa aquesta funció en sèrie de Taylor es troba que el paquet es trasllada amb una velocitat

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

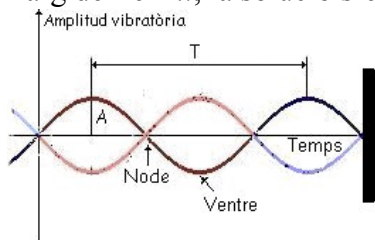
que s'anomena **velocitat de grup**. Es comprova immediatament que

$$v_g = \frac{v}{1 - k \frac{dv}{d\omega}}$$

Si v decreix amb la freqüència la velocitat de grup és menor que la de fase, i es diu que hi ha dispersió normal, i en el cas contrari es parla de dispersió anòmala.

Un diapasó genera un so d'una freqüència determinada o so pur, però un instrument musical que emet una nota està originant un senyal més complex que conté la freqüència fonamental i alguns dels seus harmònics, que caracteritzen el timbre i són els responsables que cada nota soni diferent segons l'instrument que la produeix. Els **analitzadors de so** permeten mesurar les amplituds dels diversos components. Si l'aparell analitza un soroll s'obté una línia gairebé horitzontal i es parla d'un so blanc o aleatori.

8.3. Reflexió i transmissió. Considerem en primer lloc que el medi pertorbat és semiinfinit, separat per una superfície plana d'un altre medi que és un sòlid rígid, i que la pertorbació es propaga normalment a aquest pla (fig. 8.3). Prenguem l'eix x normal al pla de separació i de manera que el medi rígid corresponga a $x \geq 0$. La condició que els punts del pla $x=0$ no es moguen només es pot aconseguir amb una combinació de les dues oncs solució de l'equació d'ones, la que va (incident) i la que torna (reflectida). Si considerem que la propagació és al llarg de l'eix x , la solució s'escriu



$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + B \cos(kx + \omega t)$$

i la condició $\psi(0, t) = 0$ exigeix que siga $B = -A$ i, doncs,

$$\psi(x, t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$$

Ara bé, cada punt vibra amb freqüència ω però amb una amplitud que canvia sinusoidalment amb la posició, de manera que hi ha punts que no es belluguen Fig. 8.3

(nodes) i d'altres que ho fan amb una amplitud màxima (ventres). Es diu que s'ha format una ona estacionària. Si hi afegim un altre pla rígid en $x = -l$, la condició addicional $\psi(-l, t) = 0$ exigeix que siga

$$\sin(kl) = 0, \text{ és a dir } kl = n\pi \text{ o } l = n \frac{\lambda}{2}$$

Així, si es tracta d'un fil vibrant, com ara una corda de guitarra, només podrà oscil·lar per a les freqüències tals que la longitud del fil siga un nombre enter de semilongituds d'ona. Si un extrem del fil és totalment lliure cal imposar-hi la condició que la tensió transversal s'anul·le (derivada espacial de ψ zero), la qual cosa implica que en lloc d'un node en aquest extrem hi haurà un ventre. Llavors es tindrà $l = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2}$. Tot el que s'ha dit sobre el fil s'aplica igualment a un tub sonor amb els extrems tancats, oberts o l'un obert i l'altre tancat.

La formació d'ones estacionàries és, doncs, un procediment molt pràctic per avaluar longituds d'ona i, per consegüent, velocitats de propagació.

Si el segon medi no és rígid sinó que permet la propagació amb una velocitat diferent, i s'admet que el generador de les ones es troba en $x = -\infty$, la solució pertinent consta de dues

ones, incident i reflectida, en el primer medi, i una ona transmesa en el segon. Ara cal imposar les condicions de continuïtat de ψ i de la seua derivada espacial en el punt de separació dels medis, $x=0$. El resultat, per a una ona harmònica, és

$$\psi_1 = \cos(k_1 x - \omega t) + \frac{1-n}{1+n} \cos(k_1 x - \omega t)$$

$$\psi_2 = \frac{2}{1+n} \cos(k_2 x - \omega t)$$

on $n=k_2/k_1 = v_1/v_2$, paràmetre que en òptica s'anomena índex de refracció. Les relacions entre les intensitats reflectida i transmesa i la incident reben els noms de **coeficients de reflexió i transmissió** respectivament:

$$R = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 \quad T = \frac{4n}{(1+n)^2}$$

que verifiquen la conservació de l'energia: $R+T=1$.

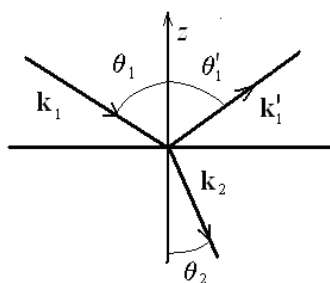
La solució en el primer medi pot escriure's així

$$\psi_1 = \cos(k_1 x - \omega t) + r \cos(k_1 x - \omega t) = (1+r) \cos k_1 x \cos \omega t + (1-r) \sin k_1 x \sin \omega t$$

i es veu que té una forma semblant a la d'una ona estacionària, però que no hi arriba a fer-se zero enlloc sinó que l'amplitud fluctua entre un mínim $1-|r|$ i un màxim $1+|r|$. Llavors es defineix la **relació d'ones estacionàries**, ROE, com el quocient entre aquests dos valors,

$$ROE = \frac{1+|r|}{1-|r|}$$

que mesura el grau d'estacionarietat de l'ona i és comprès entre la unitat, per a $r=0$ i ∞ per a $r=\pm 1$.



Considerem ara que l'ona incident es propaga formant un angle amb el pla de separació entre dos medis transparents, que prendrem com el $z=0$ (fig.8.4). Aleshores, la solució en la zona $z \geq 0$ és la superposició d'una ona harmònica plana de freqüència ω i vector d'ona \mathbf{k}_1 , que forma un angle θ_1 amb la normal al pla, i una altra de freqüència ω' i vector d'ona \mathbf{k}'_1 , amb angle θ'_1 . Són les ones incident i reflectida, respectivament. En la regió $z \leq 0$ només hi ha una ona amb freqüència ω' i vector \mathbf{k}_2 , que forma un angle θ_2 . És l'ona

Fig. 8.4 transmesa que, com

que canvia de direcció, s'anomena **refractada**. La imposició de les condicions de contorn en $z=0$ per a tots els instants obliga que totes tres freqüències siguin iguals, que els tres vectors d'ona i la normal, \mathbf{n} , siguin coplanaris, que l'angle de reflexió siga igual al d'incidència, $\theta'_1 = \theta_1$, i que el de refracció complisca la relació

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{k_2}{k_1} \equiv n$$

Aquestes són les **lleis de Snell**. Pot observar-se que si $v_1 > v_2$ es té que

$$\sin \theta_2 = \frac{v_2}{v_1} \sin \theta_1 < \sin \theta_1$$

de manera que encara per a una incidència rasant ($\theta_1=0$) hi ha ona refractada, car $\sin \theta_2 = 1/n < 1 \rightarrow \theta_2$ real. En canvi, si $v_1 < v_2$ ($n < 1$) existeix un valor màxim θ_l , anomenat angle límit, definit per

$$\sin \theta_l = \frac{v_1}{v_2}$$

i tal que si $\theta_1 > \theta_l$ no hi existeix ona refractada i es diu que hi ha hagut **reflexió total**.

La mesura dels angles d'incidència i refracció amb goniòmetres permet obtenir l'índex n o, el que és equivalent, la velocitat en el segon medi si es coneix en el primer.

8.4.- Ones sonores.

Com és natural, les mesures de magnituds relatives a una ona depenen del tipus d'ona de què es tracte i, per concretar, ens referirem a les ones sonores, de les quals ja s'han introduït alguns conceptes prèviament. El que es necessita per a fer tals mesures és un micròfon o transductor que transforma les variacions de pressió en l'atmosfera en un senyal elèctric. N'hi ha de diversos tipus:

- 1) De bobina mòbil, en els quals el so actua sobre una membrana unida a una bobina que es pot moure al si d'un camp magnètic creat per un imant; segons la llei de Faraday, s'hi indueix una força electromotriu que origina un corrent proporcional a la velocitat a què es mou la bobina. Són molt usats perquè són robusts, però les seues sensibilitat i linealitat de resposta no són tan bones com en altres models.
- 2) De cinta, en els quals en comptes d'una bobina es posa una cinta metàl·lica, el moviment de la qual dóna lloc a un corrent induït. La resposta en freqüència és molt bona però són especialment sensibles als cops, cosa que fa que només s'utilitzen en els estudis de gravació o en laboratoris.
- 3) De condensador, en els quals una de les plaques és mòbil i el seu moviment, produït pel so, fa variar la capacitat i, com que s'alimenta d'un corrent altern, les variacions esmentades generen una diferència de potencial que cal amplificar amb un preamplificador. Per aquestes dues raons necessita alimentació externa.

De cada tipus de condensador cal conèixer el **diagrama polar**, que és la representació de la seua sensibilitat en funció de l'angle d'incidència del so.



Per mesurar la velocitat de fase del so, cal determinar la freqüència i la longitud d'ona simultàniament, i el més còmode és usar un oscil·loscopi on es recullen els senyals de l'emissor i del receptor. La freqüència es troba llegint en l'escala de temps, tal com ja es va indicar; tot seguit, es desplaça l'emissor fins que tots dos senyals són en fase, s'anota la posició i es torna a desplaçar fins trobar la següent concordança de fase; la diferència entre totes dues posicions és la longitud d'ona. Notem, però, que per a un so audible, com ara la nota La (440 Hz) la velocitat del so estàndard (340 m/s) proporciona una longitud d'ona de 0,77 m. Per això, al laboratori se solen emprar ultrasons, per als quals la longitud d'ona és d'uns mil·límetres. Un altre procediment es basa a generar ones estacionàries en un tub de Kundt i mesurar així la longitud d'ona. Si hom vol mesurar la velocitat de grup es pren un emissor d'impulsos i es determina el retard de la recepció en funció de la distància.

Fig.8.5 **Sonòmetre:** el sonòmetre (fig. 8.5) és un aparell que mesura el nivell de pressió sonora o, el que és equivalent, la intensitat acústica expressada en dB. Consta essencialment d'un micròfon o transductor que transforma les variacions de pressió en un senyal elèctric; un amplificador; un circuit electrònic que permet filtrar i integrar el senyal i un dispositiu de lectura. La part electrònica s'introdueix per compensar les diferències de sensibilitat de l'orella segons la freqüència del so, i permet de fer diverses ponderacions, normalment indicades com a A, B i C; la primera és la que més s'aproxima a la percepció de l'orella i és la que se sol emprar per avaluar un so; la ponderació B correspon a senyals d'intensitat mitjana i pràcticament no s'utilitza, i la C es refereix a sons de gran intensitat. A més, permet obtenir valors mitjans temporals durant intervals que es poden variar a voluntat.

Bibliografía

- ESTERMANN, Immanuel (ed.), *Methods of Experimental Physics. Vol 1, Classical Methods*. Academic Press.
- FEYNMAN, R. P.; Leighton, R. B.; Sands, M. (1987), *Física*. Ed. Addison-Wesley Iberomericana.
- HARTLEY & Missell, *Physics by experiments*. Ed. Stanley-Thornes.
- MARION, J. B., *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Ed. Reverté.
- PERUZZO, I. L.; Tomassetti, G., *Cuaderno de experimentación en Física*. Ed. Librería Progetto Padova.
- TIPLER, P. A., *Física*. Ed. Reverté.
- WORSNOP, B. L.; Flint, H. T., *Curso Superior de Física Práctica*. Ed. Universitaria de Buenos Aires.