

Matemàtiques II

Grau en Química - 1r curs
Continguts de la part teòrica
Prof. Rafael López Machí

Índex

1	Paràmetres mostrals	3
2	Distribucions de probabilitat	4
2.1	Distribució de Bernoulli	5
2.2	Distribució binomial	5
2.3	Distribució multinomial	5
2.4	Distribució hipergeomètrica	6
2.5	Distribució geomètrica o de Pascal	6
2.6	Distribució binomial negativa	6
2.7	Distribució uniforme	7
2.8	Distribució exponencial	7
2.9	Distribució de Poisson	7
2.10	Distribució normal	8
2.11	Distribucions deduïdes de la normal	8
2.11.1	χ^2 de Pearson	8
2.11.2	t de Student	9
2.11.3	F de Snedecor	9
3	Intervals de confiança	10
3.1	Intervals de confiança per a la mitjana	10
3.2	Intervals de confiança per a la variància	11
4	Contrast d'hipòtesis	12
4.1	Contrastos d'un paràmetre	12
4.1.1	Hipòtesis referents a una mitjana	12
4.1.2	Hipòtesis referents a una variància	13
4.1.3	Contrast del paràmetre p d'una distribució binomial	14
4.2	Altres contrastos	15
5	Anàlisi de regressió	18
5.1	Ajustament lineal	18
5.2	Intervals de confiança per als paràmetres de la regressió	18

5.3	Prediccions	20
6	Ajustament per mínims quadrats	21
6.1	Ajust d'una recta	21
6.2	Ajust d'una paràbola	21
6.3	Ajust hiperbòlic	22
6.4	Ajust potencial	22
6.5	Ajust d'una funció exponencial	22
7	Tractament d'errors	23
7.1	Errors absoluts i relatius	23
7.2	Propagació d'errors en operacions numèriques	23
8	Polinomis d'interpolació	25
8.1	Interpolació de Lagrange	25
8.2	Mètodes d'Aitken i Neville	26
8.3	Mètodes de Newton	27
8.3.1	Diferències dividides	28
9	Integració numèrica	30
9.1	Fórmula dels trapezis	30
9.2	Fòrmules de Simpson	31
9.2.1	Fórmula 1/3	31
9.2.2	Fórmula 3/8	31
10	Integració numèrica d'equacions diferencials	31
10.1	Mètodes d'Euler	32
10.2	Procediment d'Euler-Cauchy millorat	32
10.3	Algoritmes de Runge–Kutta	32
11	Taules de probabilitat	35
11.1	Taula per a la normal tipificada	35
11.2	Taula per a la χ^2 de Pearson	36
11.3	Taula per a la t de Student	37
11.4	Taules per a la f de Snedecor a 0.95 i 0.99	38

Probabilitat i estadística

1 Paràmetres mostrals

La **mitjana** d'una mostra $\{x_1, \dots, x_k\}$ en què cada valor x_i ix n_i vegades és

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i \quad (1)$$

on $N = \sum_i n_i$.

Si considerem com a definició de probabilitat $p(X = x_i) = n_i/N$, aleshores

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i \frac{n_i}{N} = \sum_{i=1}^k x_i p(X = x_i)$$

expressió que ens porta a la definició d'esperança.

Si X és una variable aleatòria (VA) discreta amb funció de densitat $f(x_i) = p(X = x_i)$, definim l'**esperança** de X com a

$$E(X) = \sum_i x_i p(X = x_i) = \sum_i x_i f(x_i) \quad (2)$$

La **variància** mesura la mitjana de la dispersió dels valors d'una variable respecte al valor mitjà; per tant, es defineix com a

$$\text{var}(X) = E([X - E(X)]^2) \quad (3)$$

Igual que amb la mitjana (1), i utilitzant la definició d'esperança (2), en el cas d'una mostra $\{x_1, \dots, x_k\}$, això porta a l'expressió

$$s^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 p(X = x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i \quad (4)$$

que rep el nom de **variància mostral**.

Sovint resulta més útil per als càlculs utilitzar l'expressió equivalent

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - \bar{x}^2 \quad (5)$$

Les poblacions, enteses de forma àmplia com el conjunt total d'on es poden extraure tots els valors mostrals en un experiment, tenen una mitjana i una variància que, en general, són

desconegudes i que tractem d'aproximar. La **mitjana** i la **variància poblacionals** es representen generalment per μ i σ^2 .

Com a **estimador mostral** de la mitjana poblacional s'utilitza la mitjana definida per (1).

Tanmateix, el valor proporcionat per s^2 en (4) demostra que no estima la variància poblacional σ^2 . Per això cal definir-ne un altre valor

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i \quad (6)$$

que també s'anomena **variància mostral**. Els valors proporcionats per (4) i (6) es diferencien en ben poc, sobretot quan N és gran.

La relació que hi ha doncs entre les dues expressions de la variància mostral és

$$S^2 = \frac{N}{N-1} s^2 \quad (7)$$

L'arrel quadrada *no negativa* de la variància s'anomena **desviació típica**.

2 Distribucions de probabilitat

La **funció de densitat de probabilitat** assigna a cada valor que pot prendre la VA la seua probabilitat. Si aquesta variable pren valors discrets $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, aleshores

$$f(x_i) = p(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots \quad (8)$$

En aquest cas diem que la VA és discreta, però si el conjunt en què pot prendre valors és continu o no numerable diem que la VA és contínua.

Una **funció de distribució de probabilitat d'una VA** és una funció de variable real que es defineix així

$$F(x) = p(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (9)$$

i que s'introdueix per conèixer com es reparteix la probabilitat dels valors que pren la VA.

Així, en el cas discret tenim que $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$, i per al cas d'una distribució contínua:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En el cas continu, la funció de densitat no representa una probabilitat, com en el cas discret, però és la funció que serveix per a definir les diferents distribucions contínues i per a calcular els valors de la funció de distribució, que són els que tenen importància en aquestes distribucions.

2.1 Distribució de Bernoulli

Siga A un succés de probabilitat p coneguda. Diem que X és una **variable aleatòria de Bernoulli** quan és definida per

$$\begin{aligned} X(\omega) &= 0, & \text{si no es dona } A \\ X(\omega) &= 1, & \text{si es dona } A \end{aligned} \quad (10)$$

La seua funció de densitat és

$$f(0) = 1 - p = q, \quad f(1) = p$$

i els seus paràmetres són

$$E(X) = p, \quad \text{var}(X) = pq$$

2.2 Distribució binomial

Siga A un succés de probabilitat p i considerem n proves independents en cadascuna de les quals es pot presentar o no el succés A .

Siga X la VA que compta el nombre de vegades que es presenta A .

Aleshores, X pot prendre tots els valors de 0 a n i la seua funció de densitat és donada per

$$f(k) = p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

Diem en aquest cas que X segueix una **distribució binomial** de n proves i probabilitat p , i es representa per $B(n, p)$.

Els seus paràmetres són

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np, \quad \text{var}(X) = npq$$

2.3 Distribució multinomial

Siguen A_1, \dots, A_k , k successos mútuament excloents amb probabilitats p_1, \dots, p_k , de manera que $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$. Considerem n proves independents i siga n_i el nombre de vegades que es presenta cada A_i . Siga $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Diem que la k -uple (n_1, \dots, n_k) segueix una **distribució multinomial** i la seua funció de densitat és

$$f(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} \quad (12)$$

2.4 Distribució hipergeomètrica

S'aplica, per exemple, a les extraccions sense reemplaçament, és a dir, aquelles en què els objectes només s'extrauen una vegada.

Suposem que en una urna hi ha n boles de les quals n_1 són blanques i n_2 són negres. Extraïem m boles sense reemplaçament i la variable aleatòria compta el nombre de boles blanques extretes. Aleshores, la funció de densitat és

$$f(k) = p(X = k) = \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{m-k}}{\binom{n}{m}} \quad (13)$$

Tenim que

$$E(X) = np, \quad \text{var}(X) = npq \frac{n-m}{n-1}$$

on $p = \frac{n_1}{n}$ i $q = 1 - p$.

2.5 Distribució geomètrica o de Pascal

Siga A un succés amb probabilitat p i siga X el nombre de vegades que hem de repetir una experiència, en condicions independents, fins que es done el succés A . La variable aleatòria X pren els valors $0, 1, 2, \dots$ i la seua funció de densitat és

$$f(k) = p(X = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

L'esperança i la variància són

$$E(X) = \frac{1-p}{p}, \quad \text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

2.6 Distribució binomial negativa

La **distribució binomial negativa** s'ajusta bé al recompte d'espècies d'animals i plantes per unitat d'àrea, quan tendeixen a agrupar-se.

Siga r un enter positiu i la variable aleatòria X compta el nombre d'absències d'un succés de probabilitat p , després de $k+r$ proves, fins a aconseguir r presències. La probabilitat de cada valor de la variable és donada per

$$p(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^{r-1} q^k p \quad (15)$$

on $q = 1 - p$.

L'esperança i la variància són

$$E(X) = \frac{rq}{p}, \quad \text{var}(X) = \frac{rq}{p^2}$$

2.7 Distribució uniforme

La **distribució uniforme** correspon a una VA absolutament contínua que resulta de triar a l'atzar un nombre dins d'un interval $]a, b[$. La funció de densitat de probabilitat és

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } x \in]a, b[\\ 0, & \text{si } x \notin]a, b[\end{cases} \quad (16)$$

Tenim que

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2.8 Distribució exponencial

Per a un valor $\lambda > 0$, aquesta distribució correspon a una VA contínua de funció de densitat

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{S'obté que } E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{i} \quad \text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2.9 Distribució de Poisson

Considerem una successió de tandes d'assaigs de Bernoulli tal que cadascuna està formada per un nombre d'assaigs que canvia d'una tanda a l'altra, i suposem que la probabilitat p_n d'obtenir un èxit en cada assaig d'una tanda constituïda per n assaigs canvie en variar n , però de manera que el producte np_n es manté igual a una constant $\lambda > 0$ per a totes les tandes de la successió considerada.

Amb aquestes hipòtesis, l'objectiu és estudiar el comportament de la distribució binomial quan $n \rightarrow \infty$ i, per tant, quan $p_n \rightarrow 0$.

Amb aquesta finalitat, si designem per X_n la VA "nombre d'èxits en una tanda constituïda per n assaigs", tindrem que

$$p(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k q_n^{n-k}$$

i es demostra que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Una VA X que pren els valors $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ amb probabilitat no nul·la, diem que segueix la **distribució de Poisson** de paràmetre $\lambda > 0$ si la seua funció de densitat és

$$f(k) = p(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

L'esperança i la variància coincideixen amb el valor λ .

$$E(X) = \text{var}(X) = \lambda$$

2.10 Distribució normal

Una VA absolutament contínua X diem que es **distribueix normalment** si la seua funció de densitat és

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (19)$$

i es representa per $N(\mu, \sigma)$.

En aquest cas,

$$E(X) = \mu \quad \text{i} \quad \text{var}(X) = \sigma^2$$

Aquella distribució normal que té mitjana 0 i variància 1 s'anomena **normal tipificada**, i el pas d'una variable X , $N(\mu, \sigma)$, qualsevol a la Z , $N(0, 1)$, s'anomena *tipificar la variable*:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Designant per z_α el punt de la normal tipificada que deixa a l'esquerra una probabilitat igual a α , la taula de la pàgina 35 proporciona les probabilitats d'aquesta variable per a $0 \leq z_\alpha \leq 3.79$.

2.11 Distribucions deduïdes de la normal

2.11.1 χ^2 de Pearson

Si X_1, \dots, X_n són n VA independents amb distribució $N(0, 1)$, la variable aleatòria que s'obté per la suma dels seus quadrats

$$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

es coneix com una χ^2 de Pearson amb n graus de llibertat. La seua funció de densitat és

$$f_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{si } 0 < x < \infty \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (20)$$

per a $n = 1, 2, \dots$ i Γ és la funció *gamma d'Euler*.

Si designem per $x_{n,\alpha}$ el valor de la χ^2 amb n graus de llibertat que deixa a l'esquerra una probabilitat α , la taula de la pàgina 36 proporciona els valors que pren la variable per a diferents probabilitats fins a $n = 30$.

Per a $n > 30$ s'utilitza la taula de la variable normal tipificada $N(0, 1)$, aprofitant, per exemple, el fet que $\sqrt{2\chi_n^2}$ és asimptòticament igual a $N(\sqrt{2n-1}, 1)$.

2.11.2 t de Student

Siguen X i Y dues VA independents, de les quals X és una $N(0, 1)$ i Y és una χ_n^2 . Aleshores la VA

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

segueix una distribució t de Student amb n graus de llibertat.

La funció de densitat de probabilitat de la variable t_n és

$$f_{t_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Amb el mateix conveni de notació que hem establert anteriorment, $t_{n,\alpha}$ representa el valor de la t amb n graus de llibertat que deixa a l'esquerra una probabilitat α ; en la pàgina 37 tenim els valors de la variable per a diferents probabilitats superiors a 0.75. Per a probabilitats més menudes es pot obtenir el punt que correspon a partir de la taula aprofitant la simetria

$$\alpha = p(t \leq t_{n,\alpha}) = 1 - p(t \geq t_{n,\alpha}) = 1 - p(t \leq -t_{n,\alpha})$$

és a dir, $p(t \leq -t_{n,\alpha}) = 1 - \alpha$, que es llegeix directament en la taula.

2.11.3 F de Snedecor

Siguen X i Y dues VA independents amb distribucions χ_m^2 i χ_n^2 de Pearson. La variable aleatòria

$$F_{m,n} = \frac{\chi_m^2/m}{\chi_n^2/n}$$

s'anomena F de Snedecor amb m i n graus de llibertat.

La funció de densitat és

$$f_{F_{m,n}}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{x^{m/2-1}}{\left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{\frac{m+n}{2}}}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (22)$$

En la pàgina 38 es tenen els valors de la variable que prenen probabilitat 0.95 per a diferents combinacions de m i n , i en la pàgina següent per a la probabilitat 0.99.

També es pot aprofitar la propietat següent: Si X i Y són VA $F_{m,n}$ i $F_{n,m}$ respectivament, tenim que

$$Y_{n,m;1-\alpha} = \frac{1}{X_{m,n;\alpha}}$$

3 Intervalls de confiança

Si θ designa un paràmetre desconegut d'una població, donat un nombre positiu $\varepsilon < 1$ es tracta de trobar un interval $]a, b[$ de manera que $p(a < \theta < b) = 1 - \varepsilon$.

El valor ε rep el nom de **nivell de significació**, $1 - \varepsilon$ és el **coeficient de confiança** o **fiabilitat** i $]a, b[$ és l'**interval de confiança** pròpiament dit.

L'obtenció de les expressions que ens proporcionaran els diferents intervals es basa en els supòsits següents. Si X és normal $N(\mu, \sigma)$, aleshores:

- La variable $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ té una distribució normal de mitjana μ i variància $\frac{\sigma^2}{n}$.
- La variable $Y = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\mathcal{S}^2}{\sigma^2}$ segueix una distribució χ^2 amb $n-1$ graus de llibertat.
- Les variables \bar{X} i Y són independents.
- La variable $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ segueix una distribució normal $N(0, 1)$.
- La variable $T = \frac{Z}{\sqrt{Y/(n-1)}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} : \sqrt{\frac{(n-1)\mathcal{S}^2/\sigma^2}{n-1}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\mathcal{S}/\sqrt{n}}$ té una distribució t de Student amb $n-1$ graus de llibertat.

La quantitat \mathcal{S}^2 que apareix en les expressions és la **variància mostral** calculada per (6).

3.1 Intervalls de confiança per a la mitjana

a) Cas d'una distribució $N(\mu, \sigma)$ de variància coneguda.

Si es coneix la variància poblacional σ es té que

$$p\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right) = 1 - \varepsilon$$

(recordem que, pel criteri de notació, $z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}$ representa el punt de la normal tipificada que deixa a l'esquerra una probabilitat de $1 - \frac{\varepsilon}{2}$) i, per tant, l'interval que té una probabilitat $1 - \varepsilon$ de contenir la mitjana és donat per

$$\bar{X} \pm z_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (23)$$

b) Cas d'una distribució $N(\mu, \sigma)$ de variància desconeguda.

Quan la variància poblacional σ no es coneix i tenim poques observacions, l'interval de probabilitat $1 - \varepsilon$ s'obté per

$$\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (24)$$

c) **Interval de confiança per a la diferència de mitjanes.** Si suposem conegudes les corresponents variàncies poblacionals σ_1 i σ_2 , tenim que l'interval per a la diferència de mitjanes $\mu_1 - \mu_2$, donat un nivell de significació ε , s'obté per

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm z_{1-\varepsilon/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad (25)$$

Si no es coneixen les variàncies, però es pot suposar que són iguals, fent ús de la distribució t , tenim l'interval donat per

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{n_1+n_2-2, 1-\varepsilon/2} \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \left(\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)} \quad (26)$$

Quan les mostres són molt grans ($n_1, n_2 > 100$), podem utilitzar la fórmula (25) canviant les variàncies poblacionals σ_i^2 per les variàncies mostrals S_i^2 .

3.2 Intervals de confiança per a la variància

a) **Cas d'una distribució $N(\mu, \sigma)$ de mitjana coneguda.**

Quan la mitjana poblacional μ siga coneguda, l'interval en què es troba la variància poblacional σ amb probabilitat $1 - \varepsilon$ és donat per

$$\frac{\sum (X_i - \mu)^2}{x_{n, 1-\frac{\varepsilon}{2}}} < \sigma^2 < \frac{\sum (X_i - \mu)^2}{x_{n, \frac{\varepsilon}{2}}} \quad (27)$$

b) **Cas d'una distribució $N(\mu, \sigma)$ de mitjana desconeguda.**

En cas que μ siga desconeguda, calcularem l'interval per

$$\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{x_{n-1, 1-\frac{\varepsilon}{2}}} < \sigma^2 < \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{x_{n-1, \frac{\varepsilon}{2}}} \quad (28)$$

c) **Interval de confiança per al quocient de dues variàncies** Suposem que les mostres procedeixen de dues poblacions amb variàncies desconegudes.

Per a estimar l'interval de confiança per al quocient de les variàncies de dues mostres tenim

$$F_{n_1-1, n_2-1; 1-\varepsilon/2} \frac{S_2^2}{S_1^2} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq F_{n_1-1, n_2-1; \varepsilon/2} \frac{S_2^2}{S_1^2} \quad (29)$$

4 Contrast d'hipòtesis

Per **contrastar** una hipòtesi entenem el fet de decidir quan una afirmació relativa a un paràmetre, o a una distribució, etc., és vertadera o no ho és.

A més de la hipòtesi que es vol contrastar, que anomenarem **hipòtesi nul·la** i representarem per H_0 , hem de considerar la *hipòtesi alternativa*, H_a , que és la que resulta ser vertadera quan H_0 és falsa. Per exemple, si la hipòtesi nul·la consisteix a suposar que la mitjana μ d'una distribució és igual a 0, la hipòtesi alternativa consistirà a suposar $\mu \neq 0$. Això ho expressarem per

$$H_0 : \mu = 0, \quad H_a : \mu \neq 0$$

En pronunciar-nos sobre H_0 o H_a podem prendre una decisió incorrecta: podem rebutjar H_0 quan en realitat aquesta és certa (*error del primer tipus*) o acceptar H_0 quan aquesta és falsa (*error del segon tipus*). La probabilitat de cometre un error del primer tipus, que es designa per α , es coneix com a **nivell de significació**.

Per a pronunciar-nos sobre una hipòtesi H_0 relativa a un paràmetre poblacional utilitzem una variable aleatòria K contínua, amb una distribució coneguda, la qual anomenem **criteri estadístic** o simplement *criteri*.

Designarem per K_{obs}^0 el valor que pren el criteri K quan se suposa que H_0 és certa. Aleshores, el conjunt de tots els valors $\{K_{\text{obs}}^0\}$ que pren K^0 , a partir de les mostres aleatòries simples que es poden obtenir, es divideix en dos subconjunts diferents i disjunts: un està constituït per aquells valors $\{K_{\text{obs}}^0\}$ que porten a rebutjar la hipòtesi nul·la H_0 i formen l'anomenada **regió crítica**, i l'altre, format pels altres valors, s'anomena **regió d'acceptació**.

La determinació de regions crítiques, una vegada fixat un criteri K i triat un nivell de significació α , consisteix a determinar un punt crític c_d tal que

$$p(K^0 > c_d) = \alpha \quad (\text{per a regions a dretes})$$

o bé $p(K^0 < c_e) = \alpha$ o bé $p[(K^0 < c_1) \cup (K^0 > c_2)] = \alpha$, per als altres tipus de regions.

4.1 Contrastos d'un paràmetre

4.1.1 Hipòtesis referents a una mitjana

a) Cas en què es coneix la variància σ Si el contrast és $H_0 : \mu = \mu_0$, enfront de $H_a : \mu \neq \mu_0$, el criteri que cal utilitzar és

$$K^0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

i, segons quina siga H_a , la determinació de regions crítiques i, per tant, l'acceptació o no de H_0 , es pren d'acord amb la taula

H_a	acceptar H_0 si	rebutjar H_0 si
$\mu > \mu_0$	$K_{\text{obs}}^0 < z_{1-\alpha}$	$K_{\text{obs}}^0 > z_{1-\alpha}$
$\mu < \mu_0$	$K_{\text{obs}}^0 > z_\alpha$	$K_{\text{obs}}^0 < z_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$ K_{\text{obs}}^0 < z_{1-\alpha/2}$	$ K_{\text{obs}}^0 > z_{1-\alpha/2}$

(30)

b) Contrast de la mitjana d'una població de variància σ desconeguda En aquest cas aplicarem el criteri

$$K^0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

i decidirem segons la taula

H_a	acceptar H_0 si	rebutjar H_0 si
$\mu > \mu_0$	$K_{\text{obs}}^0 < t_{n-1,1-\alpha}$	$K_{\text{obs}}^0 > t_{n-1,1-\alpha}$
$\mu < \mu_0$	$K_{\text{obs}}^0 > t_{n-1,\alpha}$	$K_{\text{obs}}^0 < t_{n-1,\alpha}$
$\mu \neq \mu_0$	$ K_{\text{obs}}^0 < t_{n-1,1-\alpha/2}$	$ K_{\text{obs}}^0 > t_{n-1,1-\alpha/2}$

(31)

Per a n gran (> 50), com que t_n tendeix a la normal, es pot utilitzar aquest mateix criteri K i la taula (30) del cas a).

4.1.2 Hipòtesis referents a una variància

a) Contrast de la variància d'una població normal de mitjana μ coneguda Tindrem la hipòtesi nul·la $H_0 : \sigma = \sigma_0$.

El criteri serà

$$K^0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2$$

i la taula per a prendre la decisió

H_a	acceptar H_0 si	rebutjar H_0 si
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$K_{\text{obs}}^0 < x_{n,1-\alpha}$	$K_{\text{obs}}^0 > x_{n,1-\alpha}$
$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$K_{\text{obs}}^0 > x_{n,\alpha}$	$K_{\text{obs}}^0 < x_{n,\alpha}$
$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$K_{\text{obs}}^0 > x_{n,\alpha/2}$ i $K_{\text{obs}}^0 < x_{n,1-\alpha/2}$	$K_{\text{obs}}^0 < x_{n,\alpha/2}$ o $K_{\text{obs}}^0 > x_{n,1-\alpha/2}$

(32)

b) Contrast de la variància quan la mitjana és desconeguda En aquest cas prendrem com a criteri

$$K^0 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2}$$

i tindrem la taula

H_a	acceptar H_0 si	rebutjar H_0 si
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$K_{\text{obs}}^0 < x_{n-1,1-\alpha}$	$K_{\text{obs}}^0 > x_{n-1,1-\alpha}$
$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$K_{\text{obs}}^0 > x_{n-1,\alpha}$	$K_{\text{obs}}^0 < x_{n-1,\alpha}$
$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$K_{\text{obs}}^0 > x_{n-1,\alpha/2}$ i $K_{\text{obs}}^0 < x_{n-1,1-\alpha/2}$	$K_{\text{obs}}^0 < x_{n-1,\alpha/2}$ o $K_{\text{obs}}^0 > x_{n-1,1-\alpha/2}$

(33)

4.1.3 Contrast del paràmetre p d'una distribució binomial

En aquest cas contrastem la hipòtesi que un cert succés tinga probabilitat p_0 , és a dir, $H_0 : p = p_0$. Prendrem com a criteri

$$K_{\text{obs}}^0 = \frac{\frac{N}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

on N és el nombre d'ocurrències del succés en n proves. Es rebutjarà la hipòtesi nul·la sempre que $K_{\text{obs}}^0 > z_{1-\alpha}$. La determinació de les regions crítiques a l'esquerra i bilateral és immediata, i s'obté una taula resum idèntica a (30).

4.2 Altres contrastos

1. **Comparació de dues mitjanes** Considerem ara l'existència de dues poblacions representades per les variables X i Y , amb mitjanes μ_X i μ_Y i variàncies σ_X^2 i σ_Y^2 , respectivament, les quals volem comparar.

- a) Es contrasta la hipòtesi $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ quan es coneixen σ_X^2 i σ_Y^2 .

Es pren el criteri

$$K^0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$$

i tenim la taula

H_a	acceptar H_0 si	rebutjar H_0 si
$\mu_X > \mu_Y$	$K_{\text{obs}}^0 < z_{1-\alpha}$	$K_{\text{obs}}^0 > z_{1-\alpha}$
$\mu_X < \mu_Y$	$K_{\text{obs}}^0 > z_{\alpha}$	$K_{\text{obs}}^0 < z_{\alpha}$
$\mu_X \neq \mu_Y$	$ K_{\text{obs}}^0 < z_{1-\alpha/2}$	$ K_{\text{obs}}^0 > z_{1-\alpha/2}$

(34)

- b) Es contrasta $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ quan σ_X^2 i σ_Y^2 són desconegudes.

b.1. Suposem que, tot i ser desconegudes, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$. En aquest cas prendrem

$$K^0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n} \frac{1}{\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}}$$

i decidim segons la taula

H_a	acceptar H_0 si	rebutjar H_0 si
$\mu_X > \mu_Y$	$K_{\text{obs}}^0 < t_{m+n-2,1-\alpha}$	$K_{\text{obs}}^0 > t_{m+n-2,1-\alpha}$
$\mu_X < \mu_Y$	$K_{\text{obs}}^0 > t_{m+n-2,\alpha}$	$K_{\text{obs}}^0 < t_{m+n-2,\alpha}$
$\mu_X \neq \mu_Y$	$ K_{\text{obs}}^0 < t_{m+n-2,1-\alpha/2}$	$ K_{\text{obs}}^0 > t_{m+n-2,1-\alpha/2}$

(35)

b.2. Suposem que $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ i m, n grans. En aquest cas prendrem

$$K^0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}}$$

que és aproximadament $N(0, 1)$ i utilitzarem la taula (30).

2. Comparació de dues variàncies

Contrastem $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$.

La VA $\frac{S_X^2}{S_Y^2}$ té una distribució F de Snedecor amb $m - 1$ i $n - 1$ graus de llibertat. En aquest cas s'obté la taula

H_a	acceptar H_0 si	rebutjar H_0 si
$\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$	$S_X^2/S_Y^2 < f_{m-1, n-1; 1-\alpha}$	$S_X^2/S_Y^2 > f_{m-1, n-1; 1-\alpha}$
$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$	$S_X^2/S_Y^2 < \frac{1}{f_{n-1, m-1; 1-\alpha/2}}$	$S_X^2/S_Y^2 > f_{m-1, n-1; 1-\alpha/2}$

(36)

3. Comparació de dos percentatges

Es tracta de contrastar $H_0 : p_X = p_Y = p$, enfront de $H_a : p_X \neq p_Y$. Prendrem com a criteri

$$K^0 = \frac{\frac{M}{m} - \frac{N}{n}}{\sqrt{p(1-p) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)}}$$

on M i N són el nombre d'ocurrències de cada succés en la seua mostra.

Aquest estadístic segueix una distribució $N(0, 1)$, el valor del qual, a partir de les mostres, s'obté mitjançant la probabilitat mostral

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i}{m + n} = \frac{M + N}{m + n}$$

i aleshores prenem com a criteri

$$K_{\text{obs}}^0 = \frac{\frac{M}{m} - \frac{N}{n}}{\sqrt{p^* (1 - p^*) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)}}$$

S'aplica ara la taula (34) d'igualtat de mitjanes, substituint μ_X i μ_Y per p_X i p_Y , respectivament.

4. **El test χ^2 de bondat d'ajustament** Per a decidir si les dades que tenim d'una variable aleatòria corresponen a una certa distribució s'utilitza aquest test de **bondat d'ajustament**.

Si θ_i representa la freqüència observada i e_i la que s'espera d'un valor x_i , l'estadístic

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i}$$

segueix una distribució χ^2 amb $(k - 1) - m$ graus de llibertat, on m és el nombre de paràmetres que s'han d'estimar per a calcular els valors teòrics $\{e_i\}_{i=1}^k$, segons la distribució de probabilitat que estem provant.

Quan es compleix que $X^2 > \chi_{k-1-m, 1-\alpha}^2$, es rebutja l'ajustament al nivell de significació α . Quan és més menut s'accepta.

5 Anàlisi de regressió

5.1 Ajustament lineal

Fórmules per a les variàncies i covariàncies mostrals

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m n_k (x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m n_k x_k^2 - \bar{x}^2$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m n_k (y_k - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m n_k y_k^2 - \bar{y}^2$$

$$s_{xy}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m n_k x_k y_k - \bar{x} \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m n_k (x_k - \bar{x}) y_k$$

on n_k representa la freqüència absoluta del parell (x_k, y_k) i $n = \sum_{k=1}^m n_k$.

Recta de regressió de Y sobre x

$$y - \bar{y} = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2} (x - \bar{x}) \quad (37)$$

Recta de regressió de X sobre y

$$x - \bar{x} = \frac{s_{xy}^2}{s_y^2} (y - \bar{y}) \quad (38)$$

Coefficient de correlació mostral

$$r = \frac{s_{xy}^2}{\sqrt{s_x^2} \sqrt{s_y^2}} \quad (39)$$

5.2 Intervalls de confiança per als paràmetres de la regressió

En aquest cas, per al càlcul de la recta de regressió per a la mostra $\{x_i, y_j, n_{ij}\}$ utilitzem l'estimació

$$y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$$

que coincideix amb (37) prenent els valors mostrals dels estimadors:

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \frac{\sum_{i,j} n_{ij} (x_i - \bar{x}) y_j}{\sum_i n_i (x_i - \bar{x})^2} \bar{x} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}, \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_{i,j} n_{ij} (x_i - \bar{x}) y_j}{\sum_i n_i (x_i - \bar{x})^2} \quad (40)$$

i per a estimar la variància es fa servir

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{ij} n_{ij} [y_j - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i]^2 \quad (41)$$

Les expressions per als intervals de confiança dels paràmetres a i b de la regressió s'obtenen tenint en compte els supòsits següents:

1. L'estimador $\hat{\beta}$ segueix una distribució $N\left(\beta, \frac{\sigma}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}}\right)$.
2. L'estimador $\hat{\alpha}$ segueix una distribució $N\left(\alpha, \frac{\sigma\sqrt{\sum x_i^2}}{\sqrt{n \sum(x_i - \bar{x})^2}}\right)$.
3. Les distribucions de $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ són independents de la distribució de $\hat{\sigma}^2$.
4. La VA $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ segueix una distribució χ^2 amb $n - 2$ graus de llibertat.

Designant per α^* i β^* els valors mostrals que prenen els segons membres de (40) quan es consideren les observacions (x_i, y_i) , l'interval

$$\alpha^* \pm t_{n-2, 1-\varepsilon/2} \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \sum (y_i - \alpha^* - \beta^* x_i)^2}{n(n-2) \sum (x_i - \bar{x})^2}} \quad (42)$$

conté el paràmetre α amb una confiança de $1 - \varepsilon$.

Igualment, tenim que l'interval

$$\beta^* \pm t_{n-2, 1-\varepsilon/2} \sqrt{\frac{\sum (y_i - \alpha^* - \beta^* x_i)^2}{(n-2) \sum (x_i - \bar{x})^2}} \quad (43)$$

conté el paràmetre β amb una confiança de $1 - \varepsilon$.

Finalment, l'interval

$$\left[\frac{\sum (y_i - \alpha^* - \beta^* x_i)^2}{\chi_{n-2, 1-\varepsilon/2}^2}, \frac{\sum (y_i - \alpha^* - \beta^* x_i)^2}{\chi_{n-2, \varepsilon/2}^2} \right] \quad (44)$$

conté el valor de la variància σ^2 amb un nivell de confiança de $1 - \varepsilon$.

5.3 Prediccions

Es tracta de predir el valor y_0 que correspondria a l'abscissa x_0 en un model lineal simple.

En aquest cas, l'interval de predicció per al valor y_0 és donat per la condició

$$\left| \frac{y_0 - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_0)}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{n}{n-2} \left(\frac{n+1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)}} \right| < t_{n-2, 1-\varepsilon/2}$$

la qual ens dóna els extrems de l'interval de predicció en la forma

$$(\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_0) \pm t_{n-2, 1-\varepsilon/2} \hat{\sigma} \sqrt{\frac{n}{n-2} \left(\frac{n+1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)} \quad (45)$$

on $\hat{\sigma}$ és l'estimació mostral de σ , calculada per (41).

6 Ajustament per mínims quadrats

Suposem donats els punts $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ i triada una funció d'ajust definida per $y = f(x, a_1, \dots, a_k)$ en què intervenen k paràmetres a_1, \dots, a_k .

Segons el tipus de funció triada actuarem com en els casos següents.

6.1 Ajust d'una recta

En aquest cas, volem ajustar segons el model $y_i^* = a + bx_i$.

Per determinar els paràmetres a i b farem mínima la funció

$$\Phi = \sum_i \sum_j [y_j - y_i^*]^2 n_{ij} = \sum_i \sum_j [y_j - a - bx_i]^2 n_{ij}$$

Això ens porta al sistema d'equacions normals

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 2 \sum_i \sum_j (y_i - a - bx_i)(-1)n_{ij} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 2 \sum_i \sum_j (y_i - a - bx_i)(-x_i)n_{ij} = 0$$

la resolució de les quals ens proporciona per a a i b les solucions:

$$b = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (46)$$

Com es pot comprovar, aquestes solucions coincideixen per al càlcul mostral amb les expressions (40) per a les estimacions de $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$.

6.2 Ajust d'una paràbola

En aquest cas, el model triat serà $y_j^* = a + bx_i + cx_i^2$, i per a obtenir a , b i c hem de minimitzar la suma

$$\Phi = \sum_i \sum_j [y_j - a - bx_i - cx_i^2]^2 n_{ij}$$

Les equacions normals ara queden així:

$$\sum_j y_j n_{.j} = an + b \sum_i x_i n_{i.} + c \sum_i x_i^2 n_{i.}$$

$$\sum_i \sum_j x_i y_j n_{ij} = a \sum_i x_i n_{i.} + b \sum_i x_i^2 n_{i.} + c \sum_i x_i^3 n_{i.}$$

$$\sum_i \sum_j x_i^2 y_j n_{ij} = a \sum_i x_i^2 n_{i.} + b \sum_i x_i^3 n_{i.} + c \sum_i x_i^4 n_{i.}$$

la resolució de les quals proporciona a, b i c .

6.3 Ajust hiperbòlic

Tractem ara d'ajustar per un model de la forma $y = a + b\frac{1}{x}$. Aleshores el valor de y no és lineal amb els valors de x , però sí amb els valors $1/x$.

En aquest cas, ajustar les observacions (x_i, y_j, n_{ij}) es redueix a ajustar uns nous valors (z_i, y_j, n_{ij}) per la recta $y = a + bz$, fent prèviament el canvi de variable $z = \frac{1}{x}$ i calculant directament a i b per (46).

6.4 Ajust potencial

La forma general d'aquest ajust és $y = ax^b$, la qual es pot reduir de nou al cas lineal prenent logaritmes:

$$\log y = \log a + b \log x$$

Per tant, ajustarem una recta al conjunt (z_i, u_j, n_{ij}) , on $z_i = \log x_i$ i $u_j = \log y_j$. Les equacions (46) proporcionen ara amb les variables z i u els valors de $\log a$ i b .

6.5 Ajust d'una funció exponencial

Tindrem en aquest cas $y = ab^x$, d'on prenent logaritmes:

$$\log y = \log a + x \log b$$

Ara resulta lineal la relació entre $\log y$ i x , per tant ajustarem una recta a les observacions (x_i, u_j, n_{ij}) , on $u_j = \log y_j$. Les equacions (46) ens proporcionaran $\log a$ i $\log b$.

Tractament d'errors

7 Tractament d'errors

7.1 Errors absoluts i relatius

Si tenim un nombre real x i una aproximació seua \hat{x} , definim l'**error absolut** com a

$$\Delta(\hat{x}) = |x - \hat{x}|$$

Una **fitxa** per a l'error absolut $\Delta_{\hat{x}}$ és qualsevol nombre no menor que l'error absolut considerat, i tenim que $x = \hat{x} \pm \Delta_{\hat{x}}$.

L'**error relatiu** es defineix com a

$$\delta(\hat{x}) = \frac{|x - \hat{x}|}{|x|} = \frac{\Delta(\hat{x})}{|x|}$$

7.2 Propagació d'errors en operacions numèriques

Siguen $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ nombres aproximats i x_1, \dots, x_n els seus valors vertaders. Si fem la seua suma algebraica,

$$\begin{aligned} u &= x_1 \pm x_2 \cdots \pm x_n \\ \hat{u} &= \pm \hat{x}_1 \pm \hat{x}_2 \pm \cdots \pm \hat{x}_n \end{aligned}$$

d'on

$$\Delta(\hat{u}) = \pm \Delta(\hat{x}_1) \pm \Delta(\hat{x}_2) \pm \cdots \pm \Delta(\hat{x}_n)$$

i tenim que

$$|\Delta(\hat{u})| \leq |\Delta(\hat{x}_1)| + |\Delta(\hat{x}_2)| + \cdots + |\Delta(\hat{x}_n)|$$

Error en la suma Una fitxa per a l'error absolut de la suma és la suma de les fites per als errors absoluts dels nombres que hi intervenen

$$\Delta_{\hat{u}} = \Delta_{\hat{x}_1} + \Delta_{\hat{x}_2} + \cdots + \Delta_{\hat{x}_n}$$

La fitxa de l'error absolut d'una suma no pot ser més menuda que la fitxa de l'error absolut del terme que tinga l'error absolut més gran.

Si tots els termes són afectats del mateix signe, la fitxa de l'error relatiu de la suma és més menuda que la de la màxima fitxa de l'error relatiu de qualsevol d'aquells.

$$\delta_{\hat{u}} \leq \max(\delta_{\hat{x}_1}, \delta_{\hat{x}_2}, \dots, \delta_{\hat{x}_n})$$

Error en la diferència Per a la diferència tenim també que si $\hat{u} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$,

$$\Delta_{\hat{u}} = \Delta_{\hat{x}_1} + \Delta_{\hat{x}_2}, \quad \text{i} \quad \delta_{\hat{u}} = \frac{\Delta_{\hat{x}_1} + \Delta_{\hat{x}_2}}{u}$$

Cal tenir en compte que, segons aquesta expressió per a l'error relatiu de la diferència, si els nombres aproximats \hat{x}_1 i \hat{x}_2 són molt semblants i tenen errors absoluts menuts, el resultat de la diferència \hat{u} serà molt menut, però la fita de l'error relatiu pot fer-se molt gran i portar a una pèrdua d'exactitud.

Error en un producte En aquest cas tenim que $\hat{u} = \hat{x}_1 \hat{x}_2 \dots \hat{x}_n$. Si $\delta(\hat{u})$ és l'error relatiu del producte,

$$\delta(\hat{u}) \leq \delta(\hat{x}_1) + \delta(\hat{x}_2) + \dots + \delta(\hat{x}_n)$$

i, per tant, una fita per a l'error relatiu del producte serà

$$\delta_{\hat{u}} = \delta_{\hat{x}_1} + \delta_{\hat{x}_2} + \dots + \delta_{\hat{x}_n}$$

La fita de l'error absolut es pot determinar a partir de la definició d'error relatiu, per $\Delta_{\hat{u}} = |\tilde{u}| \delta_{\hat{u}}$.

Error en un quocient En un quocient $\hat{u} = \hat{x}/\hat{y}$ tenim igualment que $\delta(\hat{u}) \leq \delta(\hat{x}_1) + \delta(\hat{x}_2)$.

Errors en potències i arrels Per a potències i arrels tenim que, si $\hat{u} = \hat{x}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $\delta(\hat{u}) = m\delta(\hat{x})$.

Anàlogament, si $\hat{u} = \sqrt[m]{\hat{x}}$, $m \in \mathbb{N}$, tindrem que $\delta(\hat{u}) = \frac{1}{m}\delta(\hat{x})$.

Expressió general per al càlcul d'errors en una funció Suposem en general que $u = f(x_1, \dots, x_n)$ i siguem $\Delta_{\hat{x}_i}$ els errors absoluts dels arguments de la funció. Aleshores, l'**error absolut de la funció** és

$$\Delta(\hat{u}) = |f(\hat{x}_1 + \Delta(\hat{x}_1), \hat{x}_2 + \Delta(\hat{x}_2), \dots, \hat{x}_n + \Delta(\hat{x}_n)) - f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)|$$

Si, com passa en general, els errors absoluts són menuts i podem negligir el valor a partir del terme quadràtic de les seues potències i productes, tenim que

$$\Delta(\hat{u}) \approx |df(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta(\hat{x}_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |\Delta(\hat{x}_i)|$$

i, per tant, per a la fita de l'error absolut tenim que

$$\Delta_{\hat{u}} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |\Delta_{\hat{x}_i}|$$

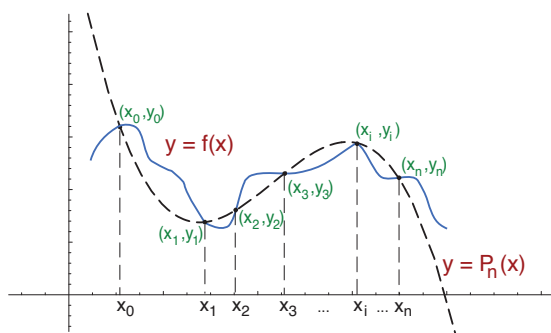
Per a la fita de l'error relatiu,

$$\delta_{\hat{u}} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \log f}{\partial x_i} \right| |\Delta_{\hat{x}_i}|$$

Càlcul numèric

8 Polinomis d'interpolació

La interpolació polinòmica tracta de resoldre el problema de trobar un polinomi adequat que passe per un conjunt donat de punts. De vegades els punts provenen directament de l'observació i en altres casos es generen a partir d'una funció coneguda $f(x)$, que volem aproximar per un polinomi per tenir-ne una aproximació en una forma senzilla.



8.1 Interpolació de Lagrange

Donats els punts $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, l'expressió general per al polinomi de Lagrange és

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i(x) y_i \quad (47)$$

on els $p_i(x)$ són polinomis de grau més menut o igual que n , que s'obtenen per

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Si les abscisses dels punts estan igualment espaiades, $x_t = x_0 + th$, tenim que

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \prod_{n+1} (t) \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{C_{n,i}}{t-i} y_i \quad (48)$$

on $t = \frac{x - x_0}{h}$ i $\prod_{n+1} (t) = t(t-1)(t-2) \cdots (t-n)$.

Expressió de l'error:

Si fem $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$, obtenim la següent estimació de l'error absolut en la fórmula d'interpolació de Lagrange

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{n+1}(x) \right| \quad (49)$$

on $\prod_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$.

8.2 Mètodes d'Aitken i Neville

Aquests mètodes són útils per a programar en un algoritme quan es vol obtenir el valor interpolat a partir d'unes dades. Utilitzen una construcció polinòmica recursiva per a obtenir el polinomi d'interpolació del grau desitjat.

Mètode d'Aitken

Es construeixen els polinomis $P_{i,j}(x)$, $i = j, \dots, n$ de grau més menut o igual que j , que interpolen successivament en les abscisses $\{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j\}$, $j = 0, \dots, n$.

Així s'arriba al polinomi $P_n(x) \equiv P_{n,n}(x)$, de grau més menut o igual que n , que ja interpola definitivament sobre tot el conjunt $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

L'algoritme és aquest:

$$\begin{aligned} P_{i,0}(x) &= y_i & i &= 0, \dots, n \\ P_{i,j+1}(x) &= \frac{(x_j - x)P_{i,j}(x) - (x_i - x)P_{j,j}(x)}{x_j - x_i} & j &= 0, \dots, n-; \quad i = j + 1, \dots, n \end{aligned} \quad (50)$$

Mètode de Neville Igual que en el mètode d'Aitken, es construeixen els polinomis $P_{i,j}(x)$, $i = 0, \dots, n - j$ de grau més menut o igual que j , que interpolen les abscisses $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}\}$, $j = 0, \dots, n$. Així s'arriba al polinomi $P_n(x) \equiv P_{0,n}(x)$, de grau més menut o igual que n , que ja interpola definitivament sobre tot el conjunt $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

L'algoritme de Neville és aquest:

$$\begin{aligned} P_{i,0}(x) &= y_i & i &= 0, \dots, n \\ P_{i,j+1}(x) &= \frac{(x_{i+j+1} - x)P_{i,j}(x) - (x_i - x)P_{i+1,j}(x)}{x_{i+j+1} - x_i} & j &= 0, \dots, n-; \quad i = 0, \dots, n - j - 1 \end{aligned} \quad (51)$$

8.3 Mètodes de Newton

Per a aplicar la primera o segona fórmules d'interpolació de Newton cal que les abscisses estiguen igualment espaiades, és a dir, $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, on h és l'espai o *pas*.

Construïm la taula de diferències a partir de les dades $\{(x_i, y_i)\}_{i=0, \dots, n}$ de la manera següent:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	\dots	$\Delta^n y$
x_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$		$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0$
x_1	y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$		$\Delta^n y_1$
x_2	y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_2$	\dots	$\Delta^n y_2$
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$		$\Delta^n y_3$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots

Primera fórmula d'interpolació de Newton El polinomi d'interpolació de Newton per a la primera forma queda així:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)^{[2]} + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)^{[n]} \quad (52)$$

on $(x - x_0)^{[j]} = (x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})$ i $\Delta^j y_0$ són les diferències d'ordre j per als valors de la funció.

Si prenem com a variable el valor $q = \frac{x - x_0}{h}$ (és a dir, el nombre de passos des del punt inicial fins al punt que s'ha d'interpolat), la *primera fórmula d'interpolació de Newton* queda

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (53)$$

Segona fórmula d'interpolació de Newton Quan el valor que s'ha d'interpolat cau en la segona meitat de les dades, s'interpolat per la *segona fórmula d'interpolació de Newton*, que utilitza les diferències en ordre invers.

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n) \cdots (x - x_1) \quad (54)$$

La fórmula (54) s'anomena *segona fórmula d'interpolació de Newton*.

Igual que hem fet en la primera, introduint ara la variable $q = \frac{x - x_n}{h}$, s'arriba a l'expressió

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (55)$$

Estimació de l'error

L'expressió per a l'error de la primera fórmula d'interpolació de Newton és

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (56)$$

on $q = \frac{x - x_0}{h}$.

Anàlogament, si $q = \frac{x - x_n}{h}$, es té l'expressió per a l'error de la segona fórmula d'interpolació de Newton:

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (57)$$

De forma aproximada es pot utilitzar el fet que

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}$$

8.3.1 Diferències dividides

Les fórmules de Newton anteriors requereixen que les abscisses x_i de les dades estiguen igualment espaiades, ja que el valor d'aquest espaiat (o pas) és el valor h emprat en les expressions. Quan les abscisses en les dades no estan igualment espaiades es pot recórrer al *mètode de diferències dividides*.

En realitat no es tracta d'un mètode diferent dels anteriors, ans al contrari, és un mètode general d'interpolació que, quan les dades estan igualment espaiades, ens porta a les expressions dels dos mètodes anteriors.

Els quocients

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (58)$$

per a $i = 0, 1, 2, \dots$ s'anomenen **diferències dividides de primer ordre**. Anàlogament, es poden definir les **diferències dividides de segon ordre** com a

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \quad (59)$$

i així successivament.

Una vegada obtingudes les diferències dividides a partir de les dades, el polinomi d'interpolació s'obté a partir dels valors d'aquestes per l'expressió següent:

$$p(x) = y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (60)$$

que es coneix com a **polinomi d'interpolació de Newton per a valors desigualment espaiats de les abscisses**.

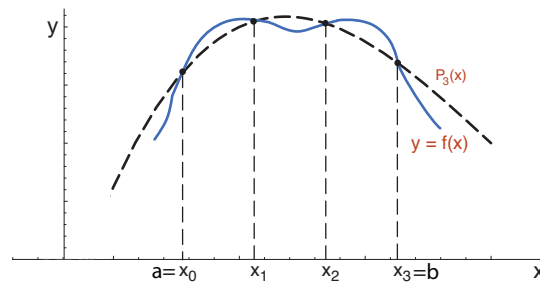
L'error en l'expressió (60) s'obté per la fórmula

$$R(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \quad (61)$$

9 Integració numèrica

La integració numèrica apareix quan volem saber el valor d'una integral definida $\int_a^b f(x) dx$ i, o bé l'expressió de $f(x)$ és complicada, o bé la mateixa $f(x)$ no té funció primitiva, o bé només coneixem un conjunt de valors de la funció (cosa que es dona freqüentment en dades experimentals).

La solució més simple en tots aquests casos consisteix a substituir l'integrand per un polinomi interpolador i obtenir el valor aproximat de la integral buscada.



Les fórmules següents, que són les més senzilles entre les fórmules d'integració numèrica, provenen de fer una interpolació de Lagrange a partir de punts igualment espaiats i després integrar directament l'expressió obtinguda. Així, les fórmules es poden aplicar directament quan tenim el conjunt de punts sense haver de calcular cada vegada el polinomi interpolador corresponent.

9.1 Fórmula dels trapezoides

Sent $h = \frac{b-a}{n}$ i designant $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, tenim, per al valor de la integral, l'expressió

$$\begin{aligned} \int_a^b y dx &= \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \dots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n) = \\ &= h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) = \\ &= \frac{h}{2} (y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-2} + y_{n-1})) \end{aligned} \quad (62)$$

L'error d'integració s'obté per l'expressió

$$R = -\frac{nh^3}{12}y''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12}y''(\xi) \quad (63)$$

on $\xi \in [a, b]$.

9.2 Fórmules de Simpson

9.2.1 Fórmula 1/3

Igual que en la fórmula dels trapezidis, la fórmula de Simpson s'aplica en general a la totalitat d'un interval $[a, b]$. Amb aquesta finalitat, aquest es divideix en un nombre parell $n = 2m$ de subintervalls, utilitzant els punts igualment espaiats $x_i, i = 0, 1, \dots, n$, dels quals coneixem el valor de la funció $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$. L'espaiat o pas serà $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$.

Obtenim que

$$\begin{aligned} \int_a^b y \, dx &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) = \\ &= \frac{h}{3}[y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})] \end{aligned} \quad (64)$$

L'error s'obté per

$$R = \left| -\frac{mh^5}{90}y^{(iv)}(\xi) \right| = \left| -\frac{(b-a)h^4}{180}y^{(iv)}(\xi) \right| \quad (65)$$

on $\xi \in [a, b]$.

9.2.2 Fórmula 3/8

En aquest cas haurem de dividir l'interval en un nombre $n = 3m$ de subintervalls mitjançant les abscisses $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$. L'expressió per a la fórmula general dels 3/8 de Simpson és

$$\int_a^b = \frac{3h}{8}[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + \dots + 3y_{3m-1} + y_{3m}] \quad (66)$$

i l'error comès s'avalua per

$$R = \left| -\frac{3h^5}{80}y^{(iv)}(\xi) \right| = \left| -\frac{(b-a)h^4}{80}y^{(iv)}(\xi) \right| \quad (67)$$

on $\xi \in [a, b]$

10 Integració numèrica d'equacions diferencials

Considerem una equació diferencial de primer ordre amb condició inicial, és a dir,

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (68)$$

Volem construir la solució $y(x)$ que satisfà aquesta equació juntament amb la condició inicial.

10.1 Mètodes d'Euler

El mètode bàsic d'Euler consisteix a construir les aproximacions a la funció solució a partir de la primera derivada, que coneixem per l'equació (68).

Això ens proporciona aquest algoritme:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

i l'error comès serà

$$R = \left| \frac{h^2}{2} y''(\xi) \right|$$

amb $x_i < \xi < x_i + h$.

La corba integral buscada $y(x)$, que passa pel punt $P_0(x_0, y_0)$, se substitueix de forma aproximada per la poligonal P_0, P_1, P_2, \dots . Els segments $P_i P_{i+1}$ tenen en cada vèrtex P_i el mateix pendent $y'_i = f(x_i, y_i)$ que la corba integral que passa pel punt P_i .

10.2 Procediment d'Euler-Cauchy millorat

Per millorar el procediment anterior, de primer es determina la solució aproximada pel mètode d'Euler, $\hat{y}_{i+1} = y_i + hf_i$ i a partir d'aquesta es determina el pendent $\hat{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})$ de les corbes integrals en el punt aproximat (x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) . Aleshores s'obté

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f_i + \hat{f}_{i+1}}{2}$$

El procediment d'Euler-Cauchy encara es pot millorar si es determina cada valor y_i de forma iterativa:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} \left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}) \right], \quad k = 1, 2, \dots$$

El procediment iteratiu continua fins que es troben dues aproximacions successives $y_{i+1}^{(m)}$ i $y_{i+1}^{(m+1)}$ que no es diferencien l'una de l'altra més que en l'ordre decimal requerit. Una vegada assolit l'ordre de precisió, posem $y_{i+1} = y_{i+1}^{(m)}$ i repetim el procés per al punt següent. Si no s'aconsegueix la precisió requerida amb diverses iteracions, s'acurta el pas h i es repeteix el procés.

10.3 Algoritmes de Runge-Kutta

Els algoritmes de Runge-Kutta tracten d'obtenir una aproximació a la funció que s'ha d'integrar fins a un cert ordre del seu desenvolupament de Taylor. Per a obtenir-la hi ha diversos algoritmes, que depenen de l'ordre d'aproximació i de l'elecció de les constants que cal determinar.

L'algoritme de Runge–Kutta de segon ordre és

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\k_1 &= f(x_i, y_i) \\k_2 &= f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))\end{aligned}$$

Un algoritme de quart ordre pot ser aquest:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (69)$$

on

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_i, y_i) \\k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \\k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right) \\k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3)\end{aligned}$$

Un algoritme molt utilitzat de cinquè ordre, anomenat *de Runge–Kutta–Fehlberg* és aquest:

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{2375k_1 + 11264k_3 + 10985k_4 - 4104k_5}{20520} \quad (70)$$

on

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_i, y_i) \\k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + h\frac{k_1}{4}\right) \\k_3 &= f\left(x_i + \frac{3}{8}h, y_i + h\frac{3k_1 + 9k_2}{32}\right) \\k_4 &= f\left(x_i + \frac{12}{13}h, y_i + h\frac{1932k_1 - 7200k_2 + 7296k_3}{2197}\right) \\k_5 &= f\left(x_i + h, y_i + h\frac{8341k_1 - 32832k_2 + 29440k_3 - 845k_4}{4104}\right)\end{aligned}$$

Per estimar l'error es calcula l'aproximació en un ordre més:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \frac{33440k_1 + 146432k_3 + 142805k_4 - 50787k_5 + 10260k_6}{282150}$$

on els k_i són els anteriors a més de

$$k_6 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + h \frac{-6080k_1 + 41040k_2 - 28352k_3 + 9295k_4 - 5643k_5}{20520}\right)$$

i l'error en cada pas s'aproxima per

$$\varepsilon \approx \frac{\|y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}\|}{h}$$

11 Taules de probabilitat

Les taules presentades en aquesta secció les ha elaborades l'autor amb el programa *Mathematica*®

11.1 Taula per a la normal tipificada

$$p(Z < z_\alpha) = \alpha$$

z_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511966	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.621720	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802337	0.805105	0.807850	0.810570	0.813267
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882977
1.2	0.884930	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.903200	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.5	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959070	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.8	0.964070	0.964852	0.965620	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.9	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.0	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.6	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.7	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.8	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.9	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.1	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.3	0.999517	0.999534	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999651
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999822	0.999828	0.999835
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925

11.2 Taula per a la χ^2 de Pearson

$$p(\chi^2 < x_{n,\alpha}) = \alpha$$

	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.00393	0.01579	0.10153	0.45493	1.32330	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	0.01002	0.02010	0.05064	0.10259	0.21072	0.57536	1.38629	2.77259	4.60517	5.99146	7.37776	9.21034	10.59660
3	0.07172	0.11483	0.21579	0.35185	0.58437	1.21253	2.36597	4.10834	6.25139	7.81473	9.34840	11.34490	12.83820
4	0.20699	0.29711	0.48442	0.71072	1.06362	1.92256	3.35669	5.38527	7.77944	9.48773	11.14330	13.27670	14.86030
5	0.41174	0.55429	0.83121	1.14548	1.61031	2.6746	4.35146	6.62568	9.23636	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.67573	0.87209	1.23734	1.63538	2.20413	3.4546	5.34812	7.8408	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	0.98926	1.23904	1.68987	2.16735	2.83311	4.25485	6.34581	9.03715	12.017	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.34441	1.6465	2.17973	2.73264	3.48954	5.07064	7.34412	10.2189	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550
9	1.73493	2.0879	2.70039	3.32511	4.16816	5.89883	8.34283	11.3888	14.6837	16.919	19.0228	21.6660	23.5894
10	2.15586	2.55821	3.24697	3.9403	4.86518	6.7372	9.34182	12.5489	15.9872	18.307	20.4832	23.2093	25.1882
11	2.60322	3.05348	3.81575	4.57481	5.57778	7.58414	10.3410	13.7007	17.275	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568
12	3.07382	3.57057	4.40379	5.22603	6.3038	8.43842	11.3403	14.8454	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.56503	4.10692	5.00875	5.89186	7.0415	9.29907	12.3398	15.9839	19.8119	22.362	24.7356	27.6882	29.8195
14	4.07467	4.66043	5.62873	6.57063	7.78953	10.1653	13.3393	17.1169	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193
15	4.60092	5.22935	6.26214	7.26094	8.54676	11.0365	14.3389	18.2451	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.14221	5.81221	6.90766	7.96165	9.31224	11.9122	15.3385	19.3689	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.69722	6.40776	7.56419	8.67176	10.0852	12.7919	16.3382	20.4887	24.769	27.5871	30.191	33.4087	35.7185
18	6.2648	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649	13.6753	17.3379	21.6049	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1565
19	6.84397	7.63273	8.90652	10.117	11.6509	14.562	18.3377	22.7178	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823
20	7.43384	8.2604	9.59078	10.8508	12.4426	15.4518	19.3374	23.8277	28.412	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.03365	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	16.3444	20.3372	24.9348	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.338	14.0415	17.2396	21.337	26.0393	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957
23	9.26042	10.1957	11.6886	13.0905	14.848	18.1373	22.3369	27.1413	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813
24	9.88623	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	19.0373	23.3367	28.2412	33.1962	36.415	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.524	13.1197	14.6114	16.4734	19.9393	24.3366	29.3389	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279
26	11.1602	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	20.8434	25.3365	30.4346	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	21.7494	26.3363	31.5284	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449
28	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	22.6572	27.3362	32.6205	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	23.5666	28.3361	33.7109	39.0875	42.557	45.7223	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	24.4776	29.336	34.7997	40.256	43.773	46.9792	50.8922	53.6720

11.3 Taula per a la t de Student

$$p(t < t_{n,\alpha}) = \alpha$$

	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.00000	3.07768	6.31375	12.7062	31.8205	63.6567	636.619
2	0.816497	1.88562	2.91999	4.30265	6.96456	9.92484	31.5991
3	0.764892	1.63774	2.35336	3.18245	4.5407	5.84091	12.9240
4	0.740697	1.53321	2.13185	2.77645	3.74695	4.60409	8.61030
5	0.726687	1.47588	2.01505	2.57058	3.36493	4.03214	6.86883
6	0.717558	1.43976	1.94318	2.44691	3.14267	3.70743	5.95882
7	0.711142	1.41492	1.89458	2.36462	2.99795	3.49948	5.40788
8	0.706387	1.39682	1.85955	2.30600	2.89646	3.35539	5.04131
9	0.702722	1.38303	1.83311	2.26216	2.82144	3.24984	4.78091
10	0.699812	1.37218	1.81246	2.22814	2.76377	3.16927	4.58689
11	0.697445	1.36343	1.79588	2.20099	2.71808	3.10581	4.43698
12	0.695483	1.35622	1.78229	2.17881	2.68100	3.05454	4.31779
13	0.693829	1.35017	1.77093	2.16037	2.65031	3.01228	4.22083
14	0.692417	1.34503	1.76131	2.14479	2.62449	2.97684	4.14045
15	0.691197	1.34061	1.75305	2.13145	2.60248	2.94671	4.07277
16	0.690132	1.33676	1.74588	2.11991	2.58349	2.92078	4.01500
17	0.689195	1.33338	1.73961	2.10982	2.56693	2.89823	3.96513
18	0.688364	1.33039	1.73406	2.10092	2.55238	2.87844	3.92165
19	0.687621	1.32773	1.72913	2.09302	2.53948	2.86093	3.88341
20	0.686954	1.32534	1.72472	2.08596	2.52798	2.84534	3.84952
21	0.686352	1.32319	1.72074	2.07961	2.51765	2.83136	3.81928
22	0.685805	1.32124	1.71714	2.07387	2.50832	2.81876	3.79213
23	0.685306	1.31946	1.71387	2.06866	2.49987	2.80734	3.76763
24	0.684850	1.31784	1.71088	2.0639	2.49216	2.79694	3.7454
25	0.684430	1.31635	1.70814	2.05954	2.48511	2.78744	3.72514
26	0.684043	1.31497	1.70562	2.05553	2.47863	2.77871	3.70661
27	0.683685	1.31370	1.70329	2.05183	2.47266	2.77068	3.68959
28	0.683353	1.31253	1.70113	2.04841	2.46714	2.76326	3.67391
29	0.683044	1.31143	1.69913	2.04523	2.46202	2.75639	3.65941
30	0.682756	1.31042	1.69726	2.04227	2.45726	2.75000	3.64596

11.4 Taules per a la f de Snedecor a 0.95 i 0.99

		$p(F_{m,n} < f_{m,n;0.95}) = 0.95$																	
n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543	241.882	243.906	245.95	248.013	249.052	250.095	251.143	252.196	253.253	254.302
2	18.5128	19.000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.371	19.3848	19.3959	19.4125	19.4291	19.4458	19.4541	19.4624	19.4707	19.4791	19.4874	19.4956
3	10.128	9.55209	9.27663	9.11718	9.01346	8.94065	8.88674	8.84524	8.8123	8.78552	8.74464	8.70287	8.66019	8.6385	8.61658	8.59441	8.5720	8.54935	8.52673
4	7.70865	6.94427	6.59138	6.38823	6.25606	6.16313	6.09421	6.04104	5.99878	5.96437	5.91173	5.85781	5.80254	5.77439	5.74588	5.71700	5.68774	5.65811	5.62843
5	6.60789	5.78614	5.40945	5.19217	5.05033	4.95029	4.87587	4.81832	4.77247	4.73506	4.6777	4.61876	4.55813	4.52715	4.49571	4.46379	4.43138	4.39845	4.3654
6	5.98738	5.14325	4.75706	4.53368	4.38737	4.28387	4.20666	4.1468	4.09902	4.05996	3.99994	3.93806	3.87419	3.84146	3.80816	3.77429	3.7398	3.70467	3.6693
7	5.59145	4.73741	4.34683	4.12031	3.97152	3.86597	3.78704	3.72573	3.67667	3.63652	3.57468	3.51074	3.44452	3.41049	3.37581	3.34043	3.30432	3.26745	3.23021
8	5.31766	4.45897	4.06618	3.83785	3.6875	3.58058	3.50046	3.4381	3.38813	3.34716	3.28394	3.21841	3.15032	3.11524	3.07941	3.04278	3.0053	2.96692	2.92805
9	5.11736	4.25649	3.86255	3.63309	3.48166	3.37375	3.29275	3.22958	3.17889	3.13728	3.07295	3.0061	2.93646	2.90047	2.86365	2.82593	2.78725	2.74752	2.70717
10	4.9646	4.10282	3.70826	3.47805	3.32583	3.21717	3.13546	3.07166	3.02038	2.97824	2.91298	2.84502	2.77402	2.73725	2.69955	2.66086	2.62108	2.58012	2.53839
11	4.84434	3.9823	3.58743	3.35669	3.20387	3.09461	3.01233	2.94799	2.89622	2.85362	2.78757	2.71864	2.64645	2.60897	2.57049	2.53091	2.49012	2.44802	2.40500
12	4.74723	3.88529	3.49029	3.25917	3.10588	2.99612	2.91336	2.84857	2.79638	2.75339	2.68664	2.61685	2.54359	2.50548	2.46628	2.42588	2.38417	2.34099	2.29675
13	4.66719	3.80557	3.41053	3.17912	3.02544	2.91527	2.8321	2.76691	2.71436	2.67102	2.60366	2.53311	2.45888	2.4202	2.38033	2.33918	2.2966	2.25241	2.20700
14	4.60011	3.73889	3.34389	3.11225	2.95825	2.84773	2.7642	2.69867	2.64579	2.60216	2.53424	2.463	2.3879	2.34868	2.30821	2.26635	2.22295	2.17781	2.13127
15	4.54308	3.68232	3.28738	3.05557	2.90129	2.79046	2.70663	2.6408	2.58763	2.54372	2.47531	2.40345	2.32754	2.28783	2.24679	2.20428	2.16011	2.11406	2.06644
16	4.494	3.63372	3.23887	3.00692	2.85241	2.74131	2.6572	2.5911	2.53767	2.49351	2.42466	2.35222	2.27557	2.23541	2.19384	2.15071	2.10581	2.05890	2.01024
17	4.45132	3.59153	3.19678	2.96471	2.8100	2.69866	2.6143	2.54796	2.49429	2.44992	2.38065	2.30769	2.23035	2.18977	2.14771	2.10400	2.05841	2.01066	1.96101
18	4.41387	3.55456	3.15991	2.92774	2.77285	2.6613	2.57672	2.51016	2.45628	2.4117	2.34207	2.26862	2.19065	2.14966	2.10714	2.06289	2.01664	1.9681	1.91747
19	4.38075	3.52189	3.12735	2.89511	2.74006	2.62832	2.54353	2.47677	2.4227	2.37793	2.30795	2.23406	2.1555	2.11414	2.07119	2.02641	1.97954	1.93024	1.87867
20	4.35124	3.49283	3.09839	2.86608	2.71089	2.59898	2.51401	2.44706	2.39281	2.34788	2.27758	2.20327	2.12416	2.08245	2.03909	1.99382	1.94636	1.89632	1.84384
21	4.32479	3.4668	3.07247	2.8401	2.68478	2.57271	2.48758	2.42046	2.36605	2.32095	2.25036	2.17567	2.09603	2.054	2.01025	1.96452	1.91649	1.86574	1.81237
22	4.30095	3.44336	3.04912	2.81671	2.66127	2.54906	2.46377	2.3965	2.34194	2.2967	2.22583	2.15078	2.07066	2.02832	1.9842	1.93802	1.88945	1.83802	1.78379
23	4.27934	3.42213	3.028	2.79554	2.6400	2.52766	2.44223	2.37481	2.32011	2.27473	2.20361	2.12822	2.04764	2.00501	1.96054	1.91394	1.86484	1.81276	1.75769
24	4.25968	3.40283	3.00879	2.77629	2.62065	2.50819	2.42263	2.35508	2.30024	2.25474	2.18338	2.10767	2.02666	1.98376	1.93896	1.89195	1.84236	1.78964	1.73376
25	4.2417	3.38519	2.99124	2.75871	2.60299	2.49041	2.40473	2.33706	2.2821	2.23647	2.16489	2.08889	2.00747	1.96431	1.91919	1.8718	1.82173	1.7684	1.71171
30	4.17088	3.31583	2.92228	2.68963	2.53355	2.42052	2.33434	2.26616	2.2107	2.16458	2.09206	2.0148	1.93165	1.88736	1.84087	1.79179	1.73957	1.68345	1.62304
40	4.08475	3.23173	2.83875	2.60597	2.44947	2.33585	2.24902	2.18017	2.12403	2.07725	2.00346	1.92446	1.83886	1.79294	1.74443	1.6928	1.63725	1.57661	1.50977
60	4.00119	3.15041	2.75808	2.52522	2.36827	2.25405	2.16654	2.09697	2.0401	1.99259	1.9174	1.83644	1.74798	1.70012	1.64914	1.59427	1.53431	1.46727	1.3903
120	3.92012	3.07178	2.68017	2.44724	2.28985	2.17501	2.08677	2.01643	1.95876	1.91046	1.8337	1.7505	1.65868	1.60844	1.55434	1.4952	1.42901	1.35189	1.25525
∞	3.84239	2.99663	2.6058	2.37282	2.21499	2.0995	2.0105	1.93934	1.88082	1.83165	1.75314	1.66739	1.57157	1.51839	1.46025	1.3952	1.31942	1.22314	1.03345

$$p(F_{m,n} < f_{m,n;0.99}) = 0.99$$

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052.18	4999.5	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47	6055.85	6106.32	6157.28	6208.73	6234.63	6260.65	6286.78	6313.03	6339.39	6365.55
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992	99.4159	99.4325	99.4492	99.4575	99.4658	99.4742	99.4825	99.4908	99.4991
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287	27.0518	26.8722	26.6898	26.5975	26.5045	26.4108	26.3164	26.2211	26.1263
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459	14.3736	14.1982	14.0196	13.9291	13.8377	13.7454	13.6522	13.5581	13.4642
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.967	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.051	9.88828	9.72222	9.55265	9.46647	9.37933	9.29119	9.20201	9.11177	9.02152
6	13.745	10.9248	9.77954	9.1483	8.7459	8.46613	8.26	8.10165	7.97612	7.87412	7.71833	7.55899	7.39583	7.31272	7.22853	7.14322	7.05674	6.96902	6.8811
7	12.2464	9.54658	8.45129	7.84665	7.46044	7.1914	6.99283	6.84005	6.71875	6.62006	6.46909	6.31433	6.15544	6.07432	5.99201	5.90845	5.82357	5.73729	5.65059
8	11.2586	8.64911	7.59099	7.00608	6.63183	6.37068	6.17762	6.02887	5.91062	5.81429	5.66672	5.51512	5.35909	5.27926	5.19813	5.11561	5.03162	4.94605	4.85986
9	10.5614	8.02152	6.99192	6.42209	6.05694	5.80177	5.61287	5.46712	5.35113	5.25654	5.11143	4.96208	4.808	4.729	4.64858	4.56665	4.48309	4.39777	4.31161
10	10.0443	7.55943	6.55231	5.99434	5.63633	5.38581	5.20012	5.05669	4.94242	4.84915	4.70587	4.55814	4.40539	4.32693	4.24693	4.16529	4.08186	3.99648	3.91004
11	9.64603	7.20571	6.21673	5.6683	5.31601	5.06921	4.88607	4.74447	4.63154	4.53928	4.3974	4.25087	4.09905	4.02091	3.94113	3.85957	3.77607	3.69044	3.60351
12	9.33021	6.92661	5.95254	5.41195	5.06434	4.82057	4.6395	4.49937	4.38751	4.29605	4.15526	4.00962	3.85843	3.78049	3.70079	3.61918	3.53547	3.44944	3.36189
13	9.07381	6.70096	5.73938	5.20533	4.86162	4.62036	4.441	4.30206	4.19108	4.10027	3.96033	3.81537	3.66461	3.58675	3.50704	3.42529	3.34129	3.25476	3.16648
14	8.86159	6.51488	5.56389	5.03538	4.69496	4.45582	4.27788	4.13995	4.02968	3.9394	3.80014	3.6557	3.50522	3.42739	3.3476	3.26564	3.18127	3.09419	3.00512
15	8.68312	6.35887	5.41696	4.89321	4.55561	4.31827	4.14155	4.00445	3.89479	3.80494	3.66624	3.52219	3.37189	3.29403	3.21411	3.13191	3.04713	2.95945	2.86954
16	8.53097	6.22624	5.29221	4.77258	4.43742	4.20163	4.02595	3.88957	3.78042	3.69093	3.55269	3.40895	3.25874	3.18081	3.10073	3.01825	2.93305	2.84474	2.75395
17	8.39974	6.11211	5.185	4.66897	4.33594	4.10151	3.92672	3.79096	3.68224	3.59307	3.4552	3.31169	3.16152	3.0835	3.00324	2.92046	2.83481	2.74585	2.65417
18	8.28542	6.0129	5.09189	4.57904	4.24788	4.01464	3.84064	3.70542	3.59707	3.50816	3.37061	3.22729	3.0771	2.99897	2.91852	2.83542	2.74931	2.6597	2.56712
19	8.18495	5.92588	5.01029	4.50026	4.17077	3.93857	3.76527	3.63052	3.5225	3.43382	3.29653	3.15334	3.00311	2.92487	2.8442	2.76079	2.67421	2.58394	2.49045
20	8.09596	5.84893	4.93819	4.43069	4.10268	3.87143	3.69874	3.56441	3.45668	3.36819	3.23112	3.08804	2.93774	2.85936	2.77848	2.69475	2.60771	2.51678	2.42237
21	8.0166	5.78042	4.87405	4.36882	4.04214	3.81173	3.63959	3.50563	3.39815	3.30983	3.17295	3.02995	2.87956	2.80105	2.71995	2.6359	2.54839	2.45681	2.36149
22	7.94539	5.71902	4.81661	4.31343	3.98796	3.7583	3.58666	3.45303	3.34577	3.25761	3.12089	2.97795	2.82745	2.7488	2.66749	2.58311	2.49515	2.40292	2.30668
23	7.88113	5.6637	4.76488	4.26357	3.93919	3.71022	3.53902	3.40569	3.29863	3.2106	3.07402	2.93112	2.7805	2.70172	2.62019	2.5355	2.44708	2.35421	2.25707
24	7.82287	5.61359	4.71805	4.21845	3.89507	3.66672	3.49593	3.36287	3.25599	3.16807	3.03161	2.88873	2.738	2.65907	2.57733	2.49232	2.40346	2.30996	2.21192
25	7.7698	5.568	4.67546	4.17742	3.85496	3.62717	3.45675	3.32394	3.21722	3.12941	2.99306	2.85019	2.69932	2.62026	2.53831	2.45299	2.36369	2.26956	2.17063
30	7.56248	5.39035	4.50974	4.01788	3.69902	3.47348	3.3045	3.17262	3.06652	2.97909	2.8431	2.70018	2.54866	2.46892	2.38597	2.29921	2.20785	2.11076	2.00753
40	7.3141	5.17851	4.31257	3.82829	3.51384	3.29101	3.12376	2.99298	2.88756	2.80055	2.66483	2.52162	2.36888	2.288	2.20338	2.11423	2.01941	1.91719	1.80613
60	7.07711	4.97743	4.12589	3.64905	3.33888	3.11867	2.95305	2.82328	2.71845	2.63175	2.49612	2.3523	2.19781	2.11536	2.02848	1.93602	1.83626	1.72632	1.60229
120	6.85089	4.78651	3.9491	3.47953	3.17355	2.95585	2.79176	2.66291	2.55857	2.47208	2.3363	2.1915	2.03459	1.95002	1.86001	1.76285	1.65569	1.53299	1.38267
∞	6.63743	4.60729	3.78358	3.32105	3.01908	2.80378	2.64111	2.51305	2.4091	2.32269	2.18652	2.04032	1.88015	1.7927	1.69835	1.59431	1.47523	1.32729	1.04763